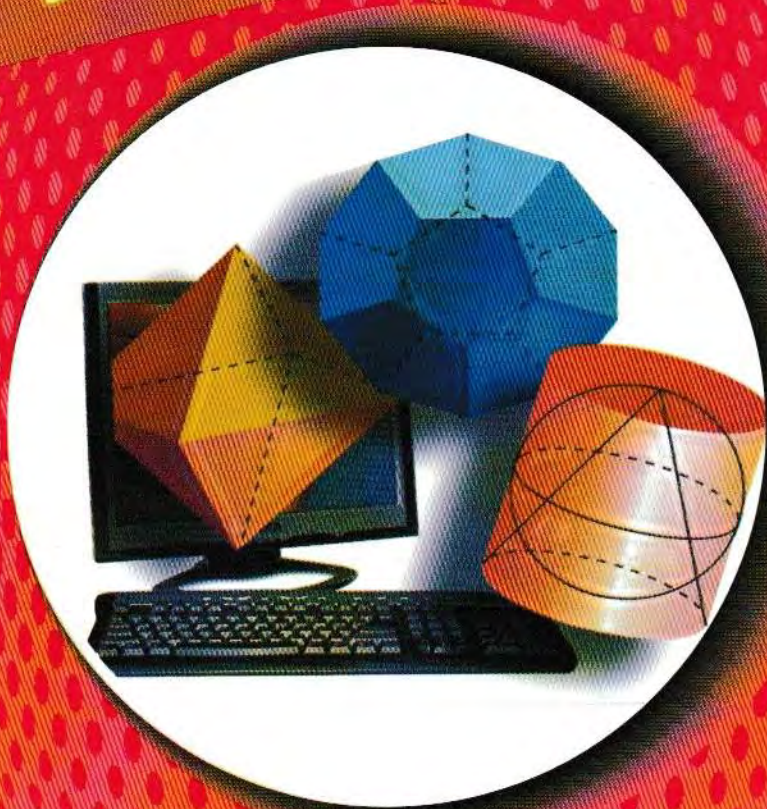


8

Rectas y Planos - Diedros y Triedros

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Luis Lazo Gutierrez

FONDO EDITORIAL
AROD

8

Rectas y Planos - Diedros y Poliedros

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Luis Lazo

FONDO EDITORIAL
ARODO

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2014, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.

RECTAS Y PLANOS - DIEDROS Y TRIEDROS



GEOMETRÍA- TEMA SELECTO 08, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Octubre 2014 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2014 - 15304

EQUIPO PEDAGÓGICO

Luis Lazo Gutiérrez

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

Víctor Meneses Huamán

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

RECTAS Y PLANOS

NOCIONES Y POSTULADOS FUNDAMENTALES

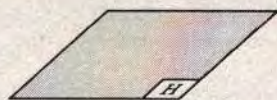
Recordemos que los entes geométricos fundamentales son el punto, la recta y el plano. Tanto la recta como el plano son conjuntos de puntos y el conjunto de todos los puntos es el *espacio geométrico*.

PLANO

La superficie plana o simplemente plano es aquella superficie tal que contiene íntegramente a la recta determinada por dos puntos cualesquiera de dicha superficie. La superficie de las aguas tranquilas, la de los espejos, la de las pizarras bien pulimentadas, etc; nos dan una idea aproximada de una porción de superficie plana. Y si la imaginamos extendida indefinidamente en todas direcciones, tenemos la idea de plano geométrico.

De la noción dada se deduce que el plano es ilimitado, pero en los dibujos se representa por medio de figuras limitadas, como regiones poligonales, circulares, etc. Frecuentemente se utilizan regiones paralelogramáticas.

Notación: Los planos se designan con una sola letra mayúscula y cuando sea necesario, para evitar confusiones, con dos o más.

Plano H o $\square H$

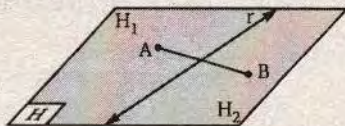
OBSERVACIONES

- Los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.
- Los puntos de un conjunto son coplanarios, si hay un plano que los contiene a todos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DE UN PLANO

Una recta "r" de un plano H separa este plano en dos conjuntos de puntos H_1 y H_2 tales que:

- $H_1 \cap H_2 = \emptyset$
- H_1 y H_2 son convexos
- Si $A \in H_1$ y $B \in H_2 \rightarrow \overline{AB}$ interseca a $\vec{r}$



Cada uno de los conjuntos H_1 y H_2 se denominan semiplano.

La recta "r" se llama arista u origen de cada uno de los semiplanos.

H_1 y H_2 se llaman semiplanos opuestos.

RECTAS Y PLANOS - DIEDROS Y TRIEDROS



GEOMETRÍA- TEMA SELECTO 08, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Octubre 2014 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424 - 6350 📠 992 - 796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2014 - 15304

EQUIPO PEDAGÓGICO

Luis Lazo Gutiérrez

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

Victor Meneses Huamán

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

RECTAS Y PLANOS**NOCIONES Y POSTULADOS FUNDAMENTALES**

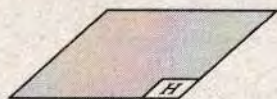
Recordemos que los entes geométricos fundamentales son el punto, la recta y el plano. Tanto la recta como el plano son conjuntos de puntos y el conjunto de todos los puntos es el *espacio geométrico*.

PLANO

La superficie plana o simplemente plano es aquella superficie tal que contiene íntegramente a la recta determinada por dos puntos cualesquiera de dicha superficie. La superficie de las aguas tranquilas, la de los espejos, la de las pizarras bien pulimentadas, etc; nos dan una idea aproximada de una porción de superficie plana. Y si la imaginamos extendida indefinidamente en todas direcciones, tenemos la idea de plano geométrico.

De la noción dada se deduce que el plano es ilimitado, pero en los dibujos se representa por medio de figuras limitadas, como regiones poligonales, circulares, etc. Frecuentemente se utilizan regiones paralelogramáticas.

Notación: Los planos se designan con una sola letra mayúscula y cuando sea necesario, para evitar confusiones, con dos o más.

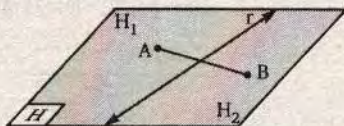
Plano H o $\square H$ **OBSERVACIONES**

- Los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.
- Los puntos de un conjunto son coplanarios, si hay un plano que los contiene a todos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DE UN PLANO

Una recta "r" de un plano H separa este plano en dos conjuntos de puntos H_1 y H_2 tales que:

- a) $H_1 \cap H_2 = \emptyset$
- b) H_1 y H_2 son convexos
- c) Si $A \in H_1$ y $B \in H_2 \rightarrow \overline{AB}$ interseca a $\vec{r}$



Cada uno de los conjuntos H_1 y H_2 se denominan semiplano.

La recta "r" se llama arista u origen de cada uno de los semiplanos.

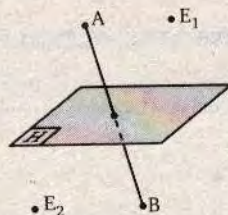
H_1 y H_2 se llaman semiplanos opuestos.

POSTULADO DE SEPARACIÓN DE PUNTOS DEL ESPACIO

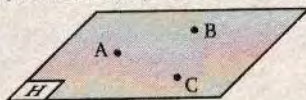
Un plano H del espacio tridimensional separa a este espacio en dos conjuntos de puntos E_1 y E_2 tales que:

- $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
- E_1 y E_2 son convexos
- Si $A \in E_1$ y $B \in E_2 \rightarrow \overline{AB}$ interseca al plano H

Cada uno de los conjuntos E_1 y E_2 se llama semiespacio. el plano H se denomina *cara* de cada uno de los semiespacios.

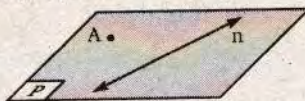
**DETERMINACIÓN DE UN PLANO**

Postulado: Tres puntos no colineales determinan un único plano al cual pertenecen. Si A, B y C son puntos no colineales, entonces: A, B y C determinan el plano H .



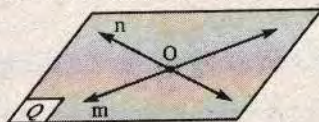
De este postulado se desprende los siguientes teoremas:

- Una recta y un punto exterior a ella determinan un único plano, al cual pertenecen.



A y $\vec{n}$ determinan el plano P

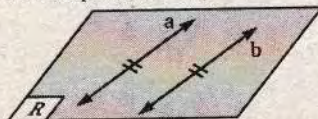
- Dos rectas que se intersecan determinan un único plano, al cual pertenecen.



$\vec{m}$ y $\vec{n}$ determinan el plano Q

Finalmente diremos que un plano queda determinado por dos rectas paralelas. Desde luego dos rectas paralelas están siempre situadas por definición en un mismo plano. Este es el único plano que las contiene, puesto que no hay más que un plano que pase por la primera y un punto de la segunda.

"Dos rectas paralelas determinan un único plano, al cual pertenecen".



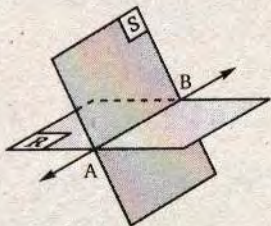
Si $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ellas determinan el plano R

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Posiciones relativas de dos planos

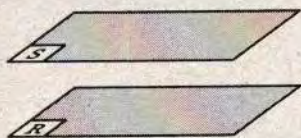
Dados dos planos del espacio:

- a) Son secantes, si tienen una recta en común, es decir, la intersección de dos planos secantes es una recta.



$$\begin{aligned} \square R \text{ y } \square S: \text{secantes} \\ \rightarrow \square R \cap \square S = \{AB\} \end{aligned}$$

- b) Son paralelos, si no se intersecan.

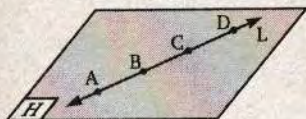


$$\begin{aligned} \text{Si } \square R // \square S \\ \rightarrow \square R \cap \square S = \emptyset \end{aligned}$$

Posiciones relativas entre una recta y un plano

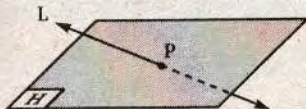
Dadas una recta y un plano:

- a) La recta está contenida en el plano si tiene todos sus puntos comunes con él.



$$\begin{aligned} \text{Si } \overleftrightarrow{L} \subset \square H \\ \rightarrow A; B; C; D; \dots \in \square H \end{aligned}$$

- b) Son secantes si se intersecan en un punto.



$$\begin{aligned} \text{Si } \overleftrightarrow{L} \cap \square H = \{P\} \\ \rightarrow \overleftrightarrow{L} \text{ y } \square H \text{ son secantes} \end{aligned}$$

- c) Son paralelos si no se intersecan.



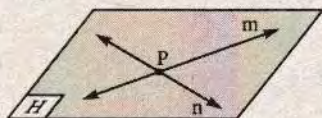
$$\begin{aligned} \text{Si } \overleftrightarrow{L} // \square H \\ \rightarrow \overleftrightarrow{L} \cap \square H = \emptyset \end{aligned}$$

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Dos rectas en el espacio pueden pertenecer a un mismo plano (rectas coplanarias) o no pertenecer al mismo plano.

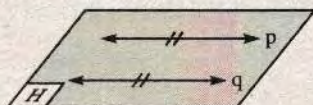
Si las rectas son coplanarias:

- a) Son secantes, si su intersección es un punto.



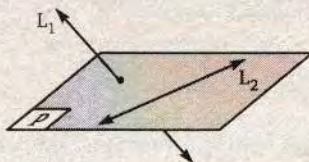
$$\begin{aligned} \vec{m} \text{ y } \vec{n} \text{ son secantes} \\ \rightarrow \vec{m} \cap \vec{n} = \{P\} \end{aligned}$$

- b) Son paralelas, si no se intersecan.



$$\vec{p} // \vec{q} \leftrightarrow \vec{p} \cap \vec{q} = \emptyset$$

Si las rectas no son coplanarias, entonces no se intersecan. En este caso se denominan rectas alabeadas o cruzadas.

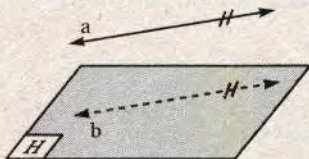


Así en la figura $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ son rectas alabeadas

RECTA PARALELA A UN PLANO

Una recta es paralela a un plano cuando la recta y el plano no tienen ningún punto en común.

Para que una recta no contenida en un plano sea paralela a dicho plano, es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea paralela a una recta que esté contenida en el plano.



Sea $\vec{a}$ una recta no contenida en el plano H

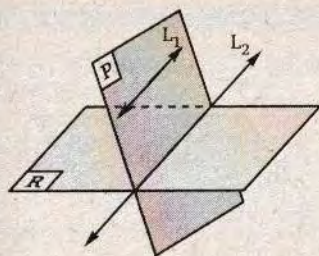
$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{a} // \vec{b} \text{ y } \vec{b} \subset \square H \\ \rightarrow \vec{a} // \square H \end{aligned}$$

**NOTA**

Si una recta es paralela a un plano, esto no significa que dicha recta será paralela a todas las rectas del plano.

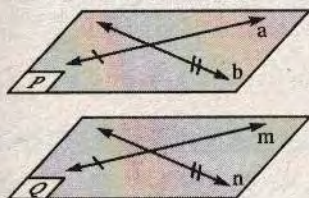
TEOREMAS SOBRE PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

1. Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pase por la recta y que corte al primero, lo intersectará según una recta paralela a la recta dada.



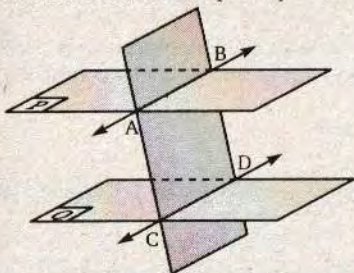
Si $\vec{L_1} \parallel \square R$; $\vec{L_1} \subset \square P$ y
 $\square P \cap \square R = \{\vec{L_2}\}$
 $\rightarrow \vec{L_1} \parallel \vec{L_2}$

2. Si dos rectas secantes de un plano son paralelas a otras dos rectas secantes de otro plano, entonces ambos planos son paralelos.



Si $\vec{a} \parallel \vec{m}$ y $\vec{b} \parallel \vec{n}$
 $\rightarrow \square P \parallel \square Q$

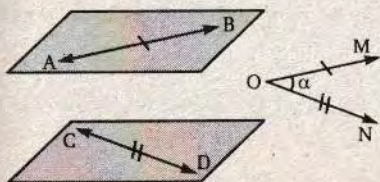
3. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano, son paralelas.



Si $\square P \parallel \square Q \rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{CD}$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

Es el ángulo determinado por dos rayos respectivamente paralelos a las rectas dadas y cuyo origen es un punto cualquiera del espacio.

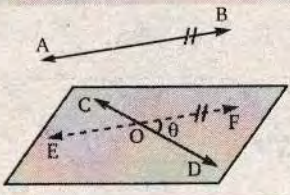


Así, dadas las rectas alabeadas AB y CD, si
 $\vec{OM} \parallel \vec{AB}$ y $\vec{ON} \parallel \vec{CD}$, entonces " α " es la medida
 del ángulo entre las rectas que se cruzan $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$.

OBSERVACION

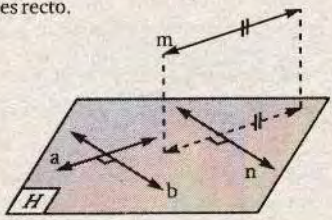
El ángulo entre dos rectas alabeadas también se obtiene trazando la paralela a una de las rectas dadas por un punto cualquiera de la otra.

Si $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$, entonces "θ" es la medida del ángulo entre las rectas que se cruzan AB y CD.



RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas que se intersecan o se cruzan, serán perpendiculares entre sí, si el ángulo que forman entre ellas es recto.



Así en la figura: $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{m} \perp \overrightarrow{n}$

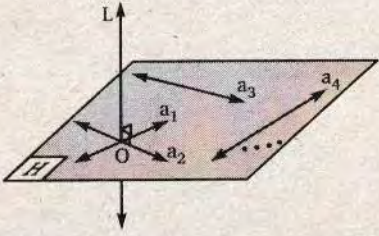
OBSERVACION

En algunos cursos se usa el término **ortogonalidad** como sinónimo de perpendicularidad.

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano. El plano se dice, a su vez, perpendicular a la recta. El punto de intersección de la recta perpendicular y el plano, se denomina pie de la perpendicular.

Así en la figura el punto "O" es el pie de la recta perpendicular L.



$\overrightarrow{L} \perp \square H$, siempre y cuando:

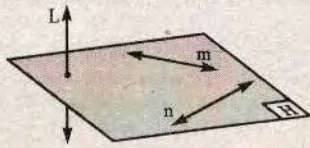
$\overrightarrow{L} \perp \overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{L} \perp \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{L} \perp \overrightarrow{a_3}; \dots$

NOTA

Si la recta interseca al plano sin serle perpendicular se llama **oblicua** al plano.

TEOREMA

Para que una recta sea perpendicular a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea perpendicular a dos rectas secantes del plano.

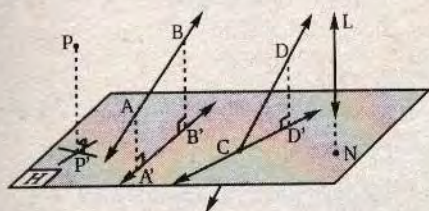


Sean m y n rectas no paralelas del plano H, si $\overrightarrow{L} \perp \overrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{L} \perp \overrightarrow{n} \rightarrow \overrightarrow{L} \perp \square H$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO Y UNA RECTA SOBRE UN PLANO

La proyección ortogonal de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada de dicho punto hacia el plano.

La proyección ortogonal de una recta sobre un plano es el conjunto de puntos del plano que son las proyecciones de los puntos de la recta sobre dicho plano.



$\square H$: Plano de proyección

$\overline{PP'}$: Proyectante

P' : Proyección ortogonal de P sobre $\square H$

$\overline{A'B'}$: Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\square H$

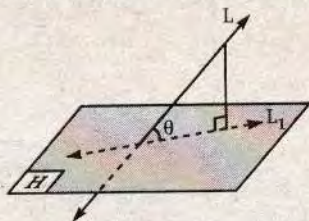
$\overline{CD'}$: Proyección ortogonal de $\overline{CD}$ sobre $\square H$

N : Proyección ortogonal de $\overline{L}$ sobre $\square H$
($\overline{L} \perp \square H$)

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

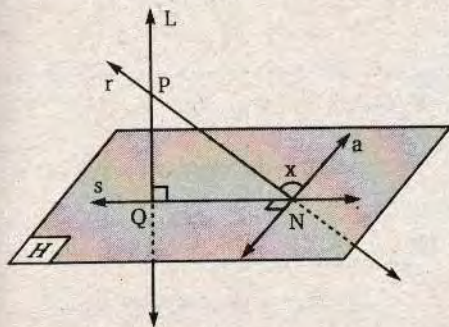
El ángulo entre una recta y un plano, es el ángulo que determina la recta con su proyección en dicho plano.

En la figura $\overline{L_1}$ es la proyección de $\overline{L}$ sobre el plano H , luego " θ " es la medida del ángulo entre la recta $\overline{L}$ y el plano H .



TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si por el pie de una recta perpendicular a un plano, se traza otra recta perpendicular a una de las rectas contenida en dicho plano, entonces toda recta trazada por el pie de esta última recta y un punto cualquiera de la recta perpendicular al plano será perpendicular a la recta contenida en dicho plano.



Sea: $\overline{L} \perp \square H$ (1ra $\perp$)

$\overline{a} \subset \square H$

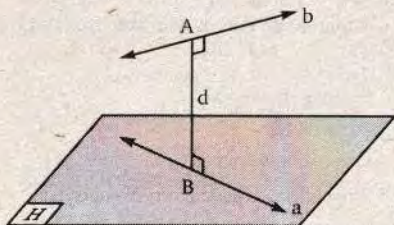
$\overline{s} \perp \overline{a}$ (2da $\perp$)

$\rightarrow \overline{r} \perp \overline{a}$ (3ra $\perp$)

$\therefore x = 90^\circ$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

La distancia entre dos rectas alabeadas es la longitud del segmento perpendicular a ambas rectas, cuyos extremos pertenecen uno a cada recta.

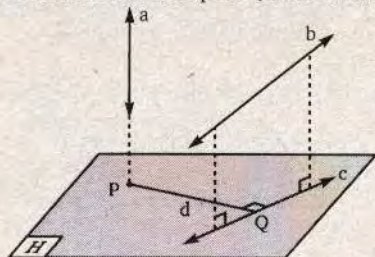


$$\begin{aligned} \text{Si: } & \overline{AB} \perp \overline{a} \\ & \overline{AB} \perp \overline{b} \\ & A \in \overline{b} \\ & B \in \overline{a} \end{aligned}$$

Entonces: $AB = d$ es la distancia entre $\overline{a}$ y $\overline{b}$

MÉTODOS PARA CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS**Primer método**

Para calcular la distancia entre dos rectas alabeadas es recomendable fijar un plano perpendicular a una de las rectas, a éste se le denomina plano de proyección. Luego la distancia entre las proyecciones de las rectas dadas sobre dicho plano (distancia entre punto y recta) será la distancia buscada.



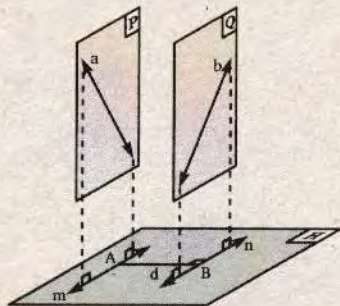
Sean $\overline{a}$ y $\overline{b}$ dos rectas alabeadas.

Si P (punto) y c son las proyecciones de $\overline{a}$ y $\overline{b}$ sobre $\square H$, entonces:

$PQ = d$ es la distancia entre $\overline{a}$ y $\overline{b}$

Segundo método

Para calcular la distancia entre dos rectas alabeadas es recomendable fijar un plano perpendicular a los planos paralelos que contienen a estas rectas alabeadas. Dicho plano será llamado plano de proyección. Luego la distancia entre las proyecciones de las rectas dadas sobre dicho plano (distancia entre dos rectas paralelas) será la distancia buscada.



Sean $\overline{a}$ y $\overline{b}$ dos rectas alabeadas contenidas en los planos P y Q ($\square P \parallel \square Q$)

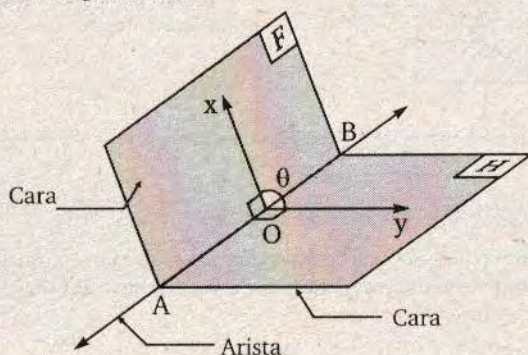
Sean H un plano perpendicular al plano Q.

Si $\overline{m}$ y $\overline{n}$ ($\overline{m} \parallel \overline{n}$) son las proyecciones de $\overline{a}$ y $\overline{b}$ sobre $\square H$, entonces:

$AB = d$ es la distancia entre $\overline{a}$ y $\overline{b}$

ÁNGULO DIEDRO**DEFINICIÓN**

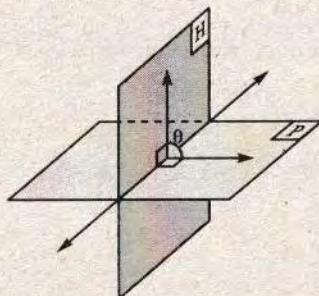
Un ángulo diedro es la reunión de una recta y dos semiplanos no coplanarios que tienen dicha recta en común como origen. La recta se llama arista del diedro y la reunión de la arista con cualquiera de los semiplanos, es una cara del ángulo diedro.

**NOTACIÓN**

- * Ángulo diedro F – AB – H o simplemente diedro AB
- * $\angle XOY$: Ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro.
- * θ : Medida del ángulo diedro.

PLANOS PERPENDICULARES

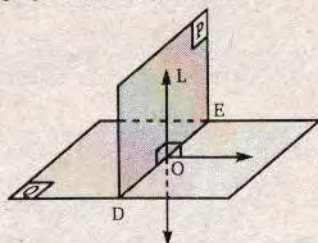
Dos planos son perpendiculares si determinan diedros que mide 90° .



En la figura mostrada si $\theta = 90^\circ$, entonces: $\square H \perp \square P$

OBSERVACIÓN

Si una recta es perpendicular a un plano, entonces todo plano que contenga a la recta será perpendicular al plano dado.

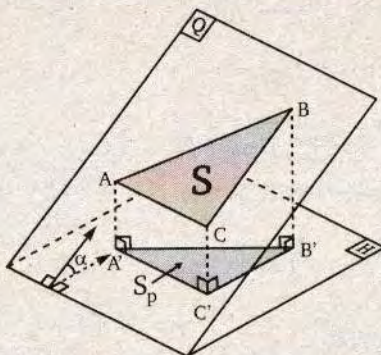


En el gráfico mostrado $\vec{L}$ es perpendicular al plano Q, en el punto "O" y P es un plano cualquiera que contiene a $\vec{L}$, entonces:

$$\square P \perp \square Q$$

TEOREMA

El área de la proyección ortogonal de una región plana sobre un plano es igual al producto del área de dicha región por el coseno del ángulo diedro, determinado por el plano que contiene a la región y el plano dado.



S : Área de la región proyectada

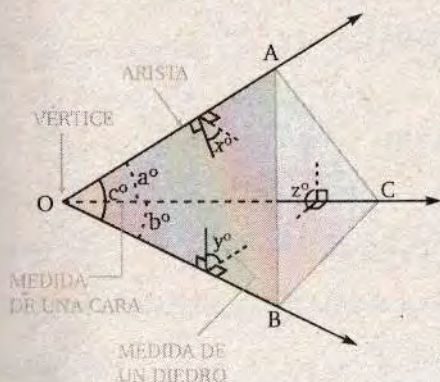
S_p : Área de la proyección

α : Medida del ángulo diedro determinado por los planos H y Q

$$S_p = S \cos \alpha$$

ÁNGULO TRIEDRO**DEFINICIÓN**

Figura geométrica que está determinado por la reunión de tres regiones angulares no coplanares, consecutivas y de vértice común. El vértice común es el vértice del ángulo triedro, los lados del ángulo son las aristas y pertenecen a dos caras del triedro.

**ELEMENTOS:**Vértice : O Aristas : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ Caras : AOB , BOC y AOC Diedros : diedro $\overline{OA}$, diedro $\overline{OB}$ y diedro $\overline{OC}$ **NOTACIÓN**TRIEDRO $O-ABC$ **TEOREMAS DE TRIEDRO**

1. En todo triedro la suma de las medidas de sus tres caras está comprendida entre 0° y 360° .

$$0 < a + b + c < 360$$

2. En todo triedro se cumple que la medida de una cara es menor que la suma de las medidas de las otras dos y mayor que la diferencia de las otras dos.

$$\rightarrow b - c < a < b + c$$

3. En todo triedro se cumple que la suma de las medidas de sus tres diedros está comprendida entre 180° y 540°

$$180^\circ < \alpha + \beta + \theta < 540^\circ$$

4. En todo triedro se cumple que a mayor cara se le opone mayor diedro, y viceversa.

$$\rightarrow a > b \leftrightarrow x > y$$

5. En todo triedro se cumple que a caras de igual medida se le oponen diedros de igual medida y viceversa.

$$\rightarrow a = b \leftrightarrow x = y$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIEDROS

Los ángulos triedros, según las medidas de sus caras son:

1. **TRIEDRO ESCALENO.-**

Sus tres caras tienen diferentes medidas.

$$a \neq b; b \neq c; a \neq c$$

2. **TRIEDRO ISÓSCELES.-**

Tiene dos caras de igual medida.

$$a = b \text{ y } a \neq c$$

3. **TRIEDRO EQUILÁTERO.-**

Sus tres caras tienen igual medida.

$$a = b = c$$

4. **TRIEDRO UNIRRECTÁNGULO.-**

Una de sus caras miden 90°

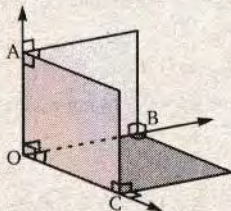
$$a = 90; a \neq b; a \neq c$$

5. **TRIEDRO BIRRECTANGULAR.-**

Dos caras miden 90° y diedros opuestos miden 90°

$$\begin{aligned} a &= b = 90; a \neq c \\ x &= y = 90; x \neq z \\ c &= z \end{aligned}$$

Ejemplo:

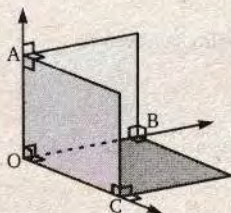


* En la figura podemos observar un triedro birrectángulo cuyas dos caras miden 90° así como sus diedros opuestos.

6. **TRIEDRO TRIRRECTANGULAR.-**

Sus tres caras miden 90° y sus tres triedros miden 90°

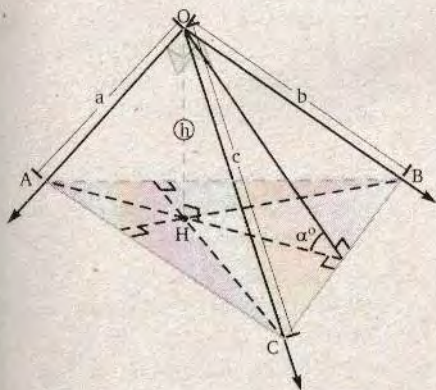
$$a = b = c = x = y = z = 90$$



* En la figura podemos observar un triedro trirrectángulo cuyas caras y diedros miden 90°

TRIEDRO TRIRRECTANGULAR

TEOREMAS



① H es el ortocentro del triángulo ABC

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\textcircled{3} \quad (S_{(BOC)})^2 = S_{(ABC)} \times S_{(BHC)}$$

$$\textcircled{4} \quad (S_{(ABC)})^2 = (S_{(AOB)})^2 + (S_{(BOC)})^2 + (S_{(AOC)})^2$$

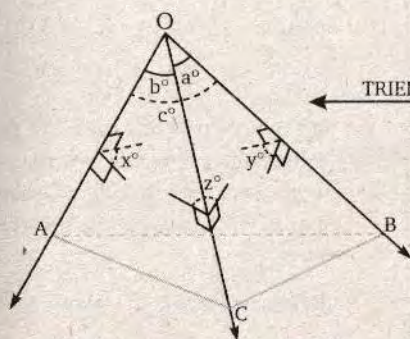
ÁNGULO TRIEDRO POLAR O SUPLEMENTARIO

DEFINICIÓN

Un ángulo triedro polar o suplementario de un ángulo triedro dado es aquel que se obtiene al trazar por un punto interior al triedro dado tres perpendiculares a cada cara.

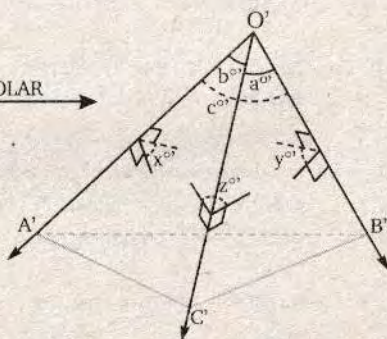
TEOREMA DEL TRIEDRO POLAR

Dado el triedro O - ABC y su triedro polar O' - A' B' C', luego se cumple que la medida de las caras de uno de ellos es suplementario de las medidas de los diedros del triedro polar.



$$a + x' = b + y' = c + z' = 180$$

TRIEDRO POLAR



$$a' + x = b' + y = c' + z = 180$$



PROBLEMAS RESUELTOS

- Dos caras de un triedro miden 120° y 130° . Calcular el máximo valor entero de la medida de la tercera cara.

A) 10° B) 89° C) 109°
D) 179° E) 249°
- Un segmento AB forma con un plano P un ángulo de 45° , un segmento AC contenido en el plano forma con la proyección de $\overline{AB}$ sobre dicho plano un ángulo de 45° . Calcular la medida del $\angle BAC$.

A) 50° B) 60° C) 70°
D) 30° E) 45°
- Indique falso o verdadero según corresponda:

I) Dos rectas cruzadas tienen un punto en común.
II) Tres puntos siempre determinan un plano.
III) La proyección de un segmento sobre un plano, es siempre otro segmento.

A) FVF B) VVF C) VFV
D) FFF E) VVV
- Se tiene 7 puntos en el espacio. Calcular el máximo número de planos que se pueden determinar.

A) 35 B) 40 C) 70
D) 95 E) 110
- Calcular el máximo número de planos que se pueden determinar con 5 rectas paralelas.

A) 5 B) 8 C) 10
D) 15 E) 17
- Calcular el máximo número de planos que se pueden determinar con 8 rectas y 6 puntos no alineados.

A) 28 B) 20 C) 48
D) 68 E) 96
- Sea $\overline{AB}$ un segmento exterior a un plano, tal que las distancias de "A" y "B" al plano midan 4 y 9 cm. Si $AB = 13$ cm, calcular la longitud de la proyección de $\overline{AB}$ sobre dicho plano.

A) 5 cm B) 13 cm C) 10 cm
D) 12 cm E) 16 cm
- $\overline{PQ}$ es un segmento que forma 45° con un plano. Si $PQ = 2\sqrt{2}$ m, calcular la proyección de $\overline{PQ}$ sobre dicho plano.

A) 4 m B) 3 m C) 2 m
D) 1 m E) $\sqrt{2}$ m
- Sea ABC un triángulo equilátero de 4 cm de lado. Levante $\overline{AH}$ perpendicular al plano del triángulo, de modo que $HA = 7$ cm. Calcular la suma de HB y HC .

A) $4\sqrt{7}$ cm B) $\sqrt{50}$ cm C) $\sqrt{57}$ cm
D) $3\sqrt{7}$ cm E) $2\sqrt{65}$ cm

10. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio y de centro "O". Levante la perpendicular $\overline{OH}$ al plano de este triángulo, de modo que $HO = 2$ cm. Calcule la distancia de "H" hacia uno de los lados del triángulo.
- A) $2\sqrt{2}$ cm B) 2 cm C) $3\sqrt{3}$ cm
D) 3 cm E) $\sqrt{3}$ cm
11. Se tiene un cubo de 4 cm de arista, donde su base es el cuadrado ABCD y una de sus alturas es $\overline{CF}$. Calcule el área del triángulo FBD.
- A) $\sqrt{6}$ cm² B) $4\sqrt{3}$ cm² C) $2\sqrt{3}$ cm²
D) $8\sqrt{3}$ cm² E) $10\sqrt{3}$ cm²
12. Se tiene un triángulo ABC, tal que $AC = 6$ cm y su altura $BH = 3$ cm. Perpendicularmente al plano de este triángulo, se levanta $\overline{BS}$, de modo que $BS = 4$ cm. Calcule el área de la región triangular ASC.
- A) 30 cm² B) 15 cm² C) 12 cm²
D) 6 cm² E) 9 cm²
13. Sea ABCD un rectángulo de modo que $CD = 6$ cm. Perpendicularmente a su plano, se levanta $\overline{BQ}$, de modo que $QD = 10$ cm. Calcule el área de la región triangular QDC.
- A) 60 cm² B) 30 cm² C) 48 cm²
D) 24 cm² E) 40 cm²
14. Sean los planos "P", "Q" y "R" paralelos entre sí. Una recta corta a estos planos en "A", "B" y "C" respectivamente y otra recta corta a dichos planos en "E", "F" y "H" respectivamente. Calcule el valor de "FE", sabiendo que: $EH = 24$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.
- A) 5,2 B) 6,8 C) 8,6
D) 6,9 E) 9,6
15. Se tienen los cuadrados ABCD y ABPQ de planos perpendiculares. Si el lado de estos cuadrados mide 6 cm, calcular la distancia entre sus centros.
- A) 6 cm B) $4\sqrt{2}$ cm C) 4 cm
D) $3\sqrt{2}$ cm E) 5 cm
16. Un ángulo diedro mide 60°, ¿A qué distancia de la arista se encuentra un punto P si se halla a 30 u de cada cara?
- A) 20 u B) 30 u C) 40 u
D) 60 u E) $40\sqrt{3}$ u
17. Se tiene un plano P y un segmento $\overline{AB}$ de 12 u de longitud que no pertenece a dicho plano. Calcule la medida del ángulo formado por $\overline{AB}$ con el plano si las proyectantes de A y B miden 13 u y 7 u respectivamente.
- A) 45° B) 30° C) 60°
D) 37° E) 53°

18. Una región triangular al ser proyectada sobre un plano determina otra región triangular cuya área es la mitad del área de la región del primero. Calcule la medida del diedro que forman los planos de los triángulos.

A) 15° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 75°

19. Dado un triángulo rectángulo isósceles AOB, siendo $AO = OB = \sqrt{6}u$; en el vértice O se levanta una perpendicular al plano AOB y se toma un punto M sobre esta perpendicular, uniendo M con los vértices A y B. Calcule el valor de $\overline{OM}$ para que el diedro $\overline{AB}$ mida 60° .

A) $3u$ B) $\sqrt{3}u$ C) $2\sqrt{3}u$
D) $4u$ E) $5u$

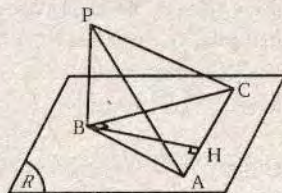
20. Dos caras de un ángulo triedro miden 150° y 170° respectivamente. Entonces, la mayor medida entera de la tercera cara es:

A) 21° B) 25° C) 30°
D) 38° E) 39°

21. En un triedro O - ABC, sus caras miden $a = 90^\circ$, $b = c = 60^\circ$. Calcule la medida del ángulo que forma la arista $\overline{OA}$ con el plano OBC.

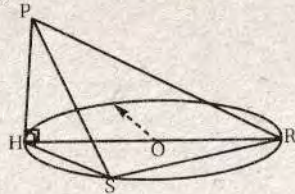
A) 60° B) 30° C) 45°
D) 37° E) 53°

22. En el gráfico, $\overline{PB}$ es perpendicular al plano R, $AH = 2u$, $HC = 8u$, $PB = 3u$. Calcule el área de la región APC.



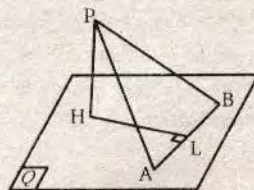
A) $20u^2$ B) $25u^2$ C) $30u^2$
D) $35u^2$ E) $40u^2$

23. En el gráfico; $m\angle RHS = 30^\circ$; $OH = 5$, $PH = 5\sqrt{3}$. Calcule el área de la región PSR.



A) $\frac{25}{2}\sqrt{6}$ B) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ C) $\frac{23}{2}\sqrt{2}$
D) $\frac{29}{2}\sqrt{5}$ E) $\frac{23}{2}\sqrt{3}$

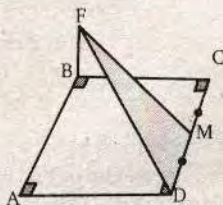
24. En el gráfico, PH es perpendicular al plano Q, $PH = 12$, $AP = BP = 13$ y $AB = 8$. Calcule HL.



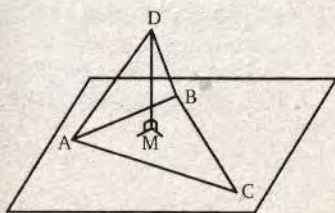
A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

25. En el gráfico, $\overline{BF}$ es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. Si: $AB = BF = BC = a$ y "M" es punto medio de $\overline{CD}$, hallar el área de la región sombreada.

- A) $\frac{a^2}{2}$
 B) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$
 C) $\frac{a^2}{6}\sqrt{2}$
 D) $\frac{a^2}{4}\sqrt{2}$
 E) $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$



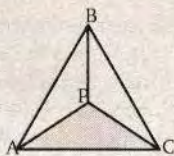
26. En el gráfico, ABC es un triángulo equilátero de ortocentro M, MD perpendicular al plano del triángulo. Calcular la medida del diedro formado por ABC y ABD ($MD = \sqrt{27}$, $AC = 6$).



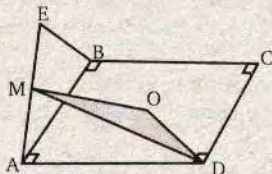
- A) $\frac{53^\circ}{2}$ B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) $\frac{127^\circ}{2}$
 D) $\frac{143^\circ}{2}$ E) $\frac{45^\circ}{2}$

27. En la figura, hay un triedro cuyas caras son mutuamente ortogonales y la longitud de sus aristas es: $PA = PB = PC = 6$ m. Hallar el área de la región triangular ABC.

- A) $9\sqrt{3} \text{ m}^2$
 B) $18\sqrt{3} \text{ m}^2$
 C) $36\sqrt{3} \text{ m}^2$
 D) $54\sqrt{3} \text{ m}^2$
 E) $3\sqrt{3} \text{ m}^2$

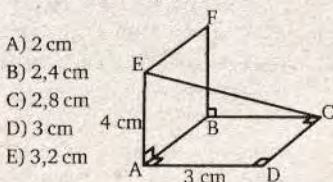


28. En la figura ABCD es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero, situados en planos perpendiculares. Si: $AB = 2$ cm, $AM = ME$ y "O" es centro del cuadrado. Hallar el área del triángulo MOD.



- A) $\frac{\sqrt{5}}{4} \text{ cm}^2$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ C) $\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$
 D) $\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm}^2$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}^2$

29. Hallar la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$ en la figura mostrada.



- A) 2 cm
 B) 2,4 cm
 C) 2,8 cm
 D) 3 cm
 E) 3,2 cm

30. Calcular la medida del diedro formado por los semicírculos de radio "R". Si el área de la región PCD es $\frac{R^2}{2}$, además: $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, $m \angle \widehat{CD} = 90^\circ$. (P: Punto medio de $\widehat{AB}$).

- A) 25° B) 30° C) 35°
 D) 40° E) 45°

31. Las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano miden, respectivamente 12 cm y 5 cm. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{AB}$?
- A) 10 cm B) 11 cm C) 12 cm
D) 13 cm E) 14 cm
32. Un segmento de recta de 26 cm, une el punto A del plano "X" con el punto B del plano Y, X e Y son planos paralelos, la proyección de AB sobre X o Y mide 24 m. La distancia entre X e Y es:
- A) 10 cm B) 11 cm C) 9 cm
D) 12 cm E) 13 cm
33. Se han determinado como máximo 45 planos utilizando "n" rectas secantes. Calcular "n".
- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13
34. Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante L_1 , los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ y sobre otra L_2 , secante, los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$. Si: $AB = 8$ m, $CD = 12$ m y $FD - EB = 1$ m. Calcular CF.
- A) 6 m B) 7 m C) 8 m
D) 9 m E) 10 m
35. Dado un triángulo rectángulo AOB, siendo: $OA = OB = 2a$; en O, se levanta una perpendicular al plano AOB, sobre la que se toma M, $OM = a\sqrt{6}$ y luego se une M con los puntos A y B. Calcule la medida del diedro AB.
- A) 15° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 75°
36. Dos puntos A y B, situados a uno y otro lado de un plano X, distan de dicho plano, 6 cm y 9 cm, respectivamente. Si la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el plano es 30 cm. Hallar la distancia entre los puntos A y B.
- A) $15\sqrt{5}$ cm B) 15 cm C) $12\sqrt{3}$ cm
D) $12\sqrt{5}$ cm E) 12 cm
37. Sean $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ son rectas cruzadas que forman un ángulo de medida igual a 60° . En $\overline{L_1}$ se marcan los puntos "A" y "B", en $\overline{L_2}$ se marcan los puntos "P" y "Q" de modo que: $\overline{AP}$ sea la mínima distancia entre ellas y $AB = PQ = 2(PA)$. Calcular la relación de QB y AP.
- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$
38. Los planos que contienen a los rectángulos ABCD y BCEF forman un ángulo diedro recto, tal que: $BC = 8$ y $BF = 6$, entonces, la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$ es:
- A) 4 B) 4,5 C) 5
D) 5,5 E) 6
39. Sea ABC un triángulo equilátero, se levanta $\overline{CF}$ perpendicular al plano del triángulo ABC de modo que $\overline{CF} \cong \overline{BA}$. Calcular la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFB.
- A) 30° B) $\arcsen \frac{2\sqrt{7}}{7}$
C) $\arcsen \frac{\sqrt{7}}{7}$
D) $\arcsen \frac{3\sqrt{7}}{7}$ E) $\arcsen \frac{\sqrt{6}}{3}$

40. Uno de los catetos de un triángulo isósceles está contenida en el plano "P" y el otro forma con dicho plano un ángulo de 45° . Calcular el ángulo que forma su hipotenusa con el plano "P".
- A) 45° B) 30°
C) 60°
D) $\arcsen \frac{1}{3}$ E) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$
41. La recta I es la intersección de dos planos x e y, perpendiculares entre sí, es paralela a una recta R del plano "x" y a una recta S del plano "y" si la distancia entre I y R es de 16 cm, y la distancia entre I y S es de 12 cm. ¿Cuál es la distancia entre R y S?
- A) 14 cm B) 25 cm C) $4\sqrt{28}$ cm
D) $10\sqrt{3}$ cm E) 20 cm
42. A - BCD es un triedro trirrectángulo de modo que: $AB = AC = AD = 6$ m. Si O es la proyección de A sobre el plano BCD, entonces la distancia que hay entre O y la arista $\overline{AB}$ es:
- A) 8 m B) $4\sqrt{3}$ m C) $6\sqrt{2}$ m
D) $2\sqrt{2}$ m E) $2\sqrt{3}$ m
43. Si un plano es paralelo a una recta:
- A) Toda perpendicular a la recta será paralela al plano.
B) Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.
C) Todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada.
D) Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.
E) Ninguna de las afirmaciones es correcta.
44. Si una recta es perpendicular a tres rectas dadas:
- A) Las tres rectas dadas tienen que ser paralelas.
B) Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.
C) Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
D) Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
45. Cuando dos planos son perpendiculares:
- A) Todo plano perpendicular a uno de ellos lo es también al otro.
B) Toda recta perpendicular a la intersección de ambos debe estar contenida en uno de ellos.
C) Todas las rectas de uno de ellos son perpendiculares al otro.
D) No siempre se cortan.
E) Todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos.
46. Se tienen los segmentos alabeados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ortogonales: $AB = 4$ y $CD = 6$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de AC y BD, si $\overline{AC}$ es perpendicular a ambos segmentos.
- A) 3 B) 4 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{15}$
47. El punto A está 8 cm encima de un plano horizontal y el punto B está 4 cm encima del mismo plano. La proyección de AB sobre el plano mide 9 cm. Calcular la longitud en cm del menor camino de A hacia B pasando por un punto del plano.
- A) 15 B) 17 C) 14
D) 21 E) 13

48. Un triángulo isósceles ABC, donde: $AB=AC=a$, está inscrito en un círculo de radio a . En A, se levanta una perpendicular AD al plano del triángulo y se une el punto D con los vértices B y C. Calcular la longitud del segmento $\overline{DB}$ para que el diedro D-BC-A mida 30°

A) $a\sqrt{\frac{13}{3}}$ B) $a\sqrt{\frac{13}{12}}$ C) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$
D) $\frac{a}{2}\sqrt{13}$ E) $a\sqrt{13}$

49. Una hoja de papel de forma rectangular ABCD, tiene como dimensiones: $AB = 8(\sqrt{5} - 1)$ m, $BC = 3$ m. Por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se dobla la hoja de papel, de tal manera que el ángulo diedro formado es de 72° . Hallar la distancia mínima que existe entre la arista del diedro y el segmento que une el centro de sus caras.

A) 2m B) 3m
C) 4m
D) $(\sqrt{5} + 1)$ m E) $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ m

50. Sea "O" un círculo de centro "O" y un cuadrado ABCD que se encuentran contenidos en planos perpendiculares (sea $\overline{AB}$ una cuerda de "O"). Se marca "M" en $\overline{DC}$, de modo que: $3DM = 5MC$, $AB = 8$ dm y $OA = 5$ dm. Calcular la distancia de "M" a OB.

A) $\frac{41}{5}$ dm B) $4\sqrt{3}$ dm C) $\frac{42}{5}$ dm
D) $\frac{40}{7}$ dm E) $\frac{40}{3}$ dm

51. Dado un triángulo ABC. $AB = 15$; $BC = 8$ y $AC = 17$. Por el incentro "I" se eleva $\overline{ID}$, perpendicular al plano ABC, siendo $ID = \sqrt{247}$. Calcular la medida del ángulo DAB.

A) 37° B) 53° C) 60°
D) 45° E) 75°

52. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, cuyo cateto $AB = 3$ m, se traza la mediana $\overline{BM}$; luego, por B, se levanta un segmento $\overline{BH}$ perpendicular al plano del triángulo ABC. Si el área de BHM es $5\sqrt{5}$ m² y el área de su proyección sobre el plano determinado por BHC es de 10 m², hallar la medida de la hipotenusa $\overline{AC}$.

A) $3\sqrt{3}$ m B) $4\sqrt{3}$ m C) $5\sqrt{5}$ m
D) $2\sqrt{5}$ m E) $3\sqrt{5}$ m

53. En el plano P se tiene el triángulo ABC, cuyo ángulo A mide 60° . Se tiene un punto S fuera del plano P. Si las distancias, de S al punto A es igual a 25 cm, de S al lado $\overline{AC}$ igual a 20 cm, y de S al lado $\overline{AB}$ igual a 7 cm. Hallar la distancia de S al plano P.

A) $\sqrt{37}$ cm B) $\sqrt{39}$ cm C) $\sqrt{38}$ cm
D) 6 cm E) $\sqrt{31}$ cm

54. Se tiene un cuadrado ABCD de lado igual a $\sqrt{2}$ cm. Un semicírculo de diámetro $\overline{OC}$ es perpendicular al plano del cuadrado y se traza la tangente $\overline{AP}$. Hallar el área de la región triangular APB siendo "O" centro del cuadrado.

A) $\sqrt{5}$ cm² B) $2\sqrt{5}$ cm² C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm²
D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm² E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ cm²

55. Un punto "P" se mueve permaneciendo a 7m de los extremos de $\overline{AB}$ cuya longitud es de 10m. Calcular el área de la región limitada por el lugar geométrico de los puntos "P".
- A) $20\pi \text{ m}^2$ B) $22\pi \text{ m}^2$ C) $24\pi \text{ m}^2$
D) $18\pi \text{ m}^2$ E) $30\pi \text{ m}^2$
56. En un triángulo equilátero ABC, inscrito en una circunferencia; por M punto medio del arco BC se levanta una perpendicular al plano del triángulo hasta un punto D. Hallar la distancia del punto D al baricentro del triángulo ABC. Si: $AD^2 - AC^2 = 3u^2$.
- A) $\sqrt{3}u$ B) $3u$ C) $1,5u$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}u$ E) $2\sqrt{3}u$
57. Indicar si es falso o verdadero, según corresponda:
- * Si una recta es paralela a un plano, entonces dicha recta será paralela a todas las rectas contenidas en dicho plano. ()
 - * Si un conjunto de rectas son paralelas, necesariamente dichas rectas son coplanares. ()
 - * Si una recta es perpendicular a otras tres dadas, las rectas dadas necesariamente tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular. ()
- A) FVV B) FVF C) VFF
D) FFF E) VVF
58. Dado el ángulo diedro $P - AB - Q$; y el punto E entre las caras P y Q que distan de dichas caras $6\sqrt{5}u$ y $12u$ respectivamente. Además la distancia de E a $\overline{AB}$ mide $15u$. Hallar la medida del ángulo diedro.
- A) $122^\circ 30'$ B) 127° C) 93°
D) $97^\circ 30'$ E) $116^\circ 30'$
59. Dos caras de un triedro miden 45° cada uno y se encuentran formando un diedro de 90° . Hallar la medida de la tercera cara.
- A) 45° B) 30° C) 60°
D) 53° E) 135°
60. Dado el segmento MN de 35 cm de longitud y secante a un plano de tal modo que las distancias de "M" y "N" al plano suma 28 cm. Calcular la longitud de la proyección sobre el plano.
- A) 17 cm B) 18 cm C) 19 cm
D) 20 cm E) 21 cm
61. En un triángulo ABC, $AB = 6$, $BC = 8$ y $AC = 10$. Por el vértice "A" se levanta $\overline{AD}$ perpendicular al plano del triángulo. Si "M" es punto medio de $\overline{BC}$, calcular la medida del ángulo entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DM}$, sabiendo además que $AD = 2\sqrt{5}$.
- A) 30° B) 60° C) 45°
D) 37° E) 53°

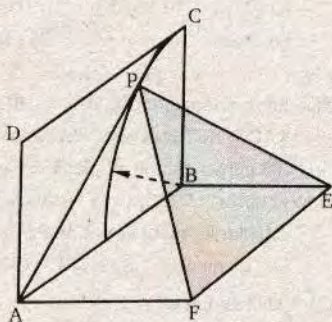
62. Se tiene un triángulo rectángulo ABC donde los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ miden cada uno $\sqrt{2}$. Por "B" se levanta la perpendicular $\overline{BH}$ al plano del triángulo tal que $BH = 3$. Calcular HM si "M" es punto medio de la hipotenusa.

A) 4 B) 3 C) 7
D) 6 E) 5

63. Se considera un punto "P" exterior y no coplanar a un rectángulo ABCD. Si: $PA = 3$; $PB = 4$; $PC = 5$. Calcular PD.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) 6

64. En la figura, las regiones rectangulares ABCD y ABEF están ubicadas en planos perpendiculares, P es punto de tangencia y pertenece al plano ABCD, $AB = 2(BC) = 4\text{ m}$ y $AF = \sqrt{33}\text{ m}$. Calcule el área de la región triangular FPE.



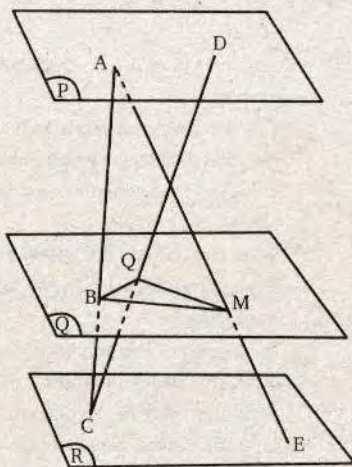
A) 10 m^2 B) 8 m^2 C) 12 m^2
D) 13 m^2 E) 9 m^2

65. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Dos planos paralelos a una misma recta son paralelos.
- II. Todo plano perpendicular a una recta situada en un plano es perpendicular a dicho plano.
- III. Si una recta no es perpendicular a un plano, entonces, no es perpendicular a ninguna recta contenida en el plano.

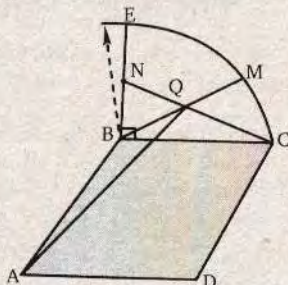
A) VVF B) FVV C) VVV
D) FVF E) FFF

66. En el gráfico, los planos P, Q y R son paralelos. Si $AM = 4(ME)$; $AE \cap CD = \emptyset$ y $AD + 4(CE) = 20$, calcule el máximo valor entero del perímetro de la región triangular BQM.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 10

67. En el gráfico, BE es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. Si $BN=NE$ y $m\angle MC = 37^\circ$, calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AQ}$ y $\overrightarrow{DC}$.



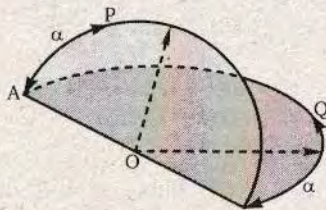
- A) 15° B) $\frac{37^\circ}{2}$ C) $\frac{53^\circ}{2}$
D) 30° E) 16°
68. Se tiene un triángulo ABC, recto en B y se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano que lo contiene, además, la medida del ángulo entre $\overline{PB}$ y dicho plano es α . Si $m\angle ACB = \theta$ y $BC = a$, calcule el área de la región PBC.
- A) $\frac{a^2}{2} \cot \theta \cdot \sec \alpha$ B) $\frac{a^2}{2} \tan \theta \cdot \sec \alpha$
C) $\frac{a^2}{2} \cos \theta$
D) $\frac{a^2}{2} \tan \theta \cdot \csc \alpha$ E) $\frac{a^2}{2} \sin 2\theta$
69. Se tiene un rectángulo ABCD. se ubica el punto P exterior al plano que lo contiene. Si M es punto medio de $\overline{PD}$; $AC = 2(AM)$ y $m\angle MAC = 50^\circ$, calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{PB}$.

- A) 50° B) 65° C) 80°
D) 45° E) 75°

70. Sean $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ dos rectas cruzadas y ortogonales. Se ubican los puntos A y B en $\vec{x}_1$, C y D en $\vec{x}_2$, de modo que $\overline{AC}$ es perpendicular a ambas rectas. Si $AC = 2(AB) = 2(CD)$, calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AC}$.

- A) $\arctan(\sqrt{2})$ B) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
C) 45°
D) $\arctan(2)$ E) $\frac{45^\circ}{2}$

71. En el gráfico se muestra dos semicírculos de diámetro $\overline{AB}$. Si $AB=12\text{cm}$; $PQ=8$; $m\angle AP = m\angle BQ$, la medida del ángulo que forma PQ con el plano ABQ es 30° y $\sin \alpha = \frac{5}{6}$, calcule la medida del diedro P-AB-Q.



- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

72. En un cubo de arista $2\sqrt{3}$ (ABCD - EFGH), O es centro de la cara ADHE y M pertenece a $\overline{CH}$ de modo que: $HM = 3MC$. Calcule la distancia entre BO y FM.

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $2\sqrt{3}$

73. Dos semicircunferencias de diámetro $\overline{AB}$ están contenidas en planos perpendiculares, y en cada una de ellas se ubican los puntos P y Q , respectivamente, de modo que la $m\widehat{BQ} = m\widehat{AP} = \theta$. Calcule la medida del ángulo que forman $\overline{PQ}$ y el plano APB , si:

$$\theta = \arctan \sqrt{2}$$

- A) 45° B) 37° C) 30°
D) 60° E) 53°
74. Por el vértice A de un hexágono regular se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si $AP = EF = 4$, calcule la distancia entre $\overline{FC}$ y $\overline{PD}$.
- A) 3 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$
75. Por el centro O de un cuadrante AOB se traza la perpendicular $\overline{OP}$ a su plano, en AB se ubica M tal que: $m\widehat{AM} = 8^\circ$; $4(OA) = 5(OP)$ y $AO = OB = 5\sqrt{2}$. Calcule el doble de la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{PM}$.
- A) $4 - \frac{5}{2}\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2} - 5$ C) $8 - 5\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $8 - 4\sqrt{2}$
76. En un triángulo ABC , $m\angle BAC = 2m\angle BCA$, además, en $\overline{AC}$ se ubica el punto D tal que $AB = AD$. Si por el punto medio M de $\overline{BD}$ se traza $\overline{MP}$ perpendicular al plano del triángulo ABC ; $MP = 12$ y $AP = BC$, calcule la distancia entre $\overline{BD}$ y $\overline{AP}$.

- A) 9 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

77. Si el cuadrado $ABCD$ ($AB = 4\sqrt{3}$) y el triángulo equilátero DAE determinan un diedro cuya medida es 30° , calcule la distancia del baricentro de la región triangular ADE al punto medio de AB .

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) $3\sqrt{2}$

78. Sean las regiones poligonales regulares $ABC - DEF$ y $AFGH$ ubicadas en distintos planos. Si la medida del diedro $\overline{AF}$ es 90° , calcule la medida del ángulo diedro determinado por las regiones HCE y $AB CDEF$.

- A) $\arctan\left(\frac{2}{5}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

C) $\arctan\left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

D) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$ E) $\arctan\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

79. Sobre una mesa se hace girar una lámina rectangular de dimensiones a y b ($b > a$) alrededor del lado cuya longitud es a , de tal forma que su proyección ortogonal sobre la mesa sea una región cuadrada. Calcule la distancia entre los centros de la lámina y su proyección.

A) $\frac{ab}{2}$ B) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ C) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$ E) $\sqrt{a^2 - b^2}$

80. Calcule la medida de un ángulo diedro, si las distancias de un punto interior a las caras y a la arista son $3\sqrt{2}$; 3 y 6 respectivamente.

- A) 30° B) 60° C) 75°
D) 100° E) 120°

81. Si una semicircunferencia de diámetro $AB = 4$, centro O y el rectángulo $BNPC$ ($C \in \overline{OA}$) pertenecen a distintos planos, calcule la medida del diedro que determinan dichos planos.

Considere que: $MC = \sqrt{3}(AC) = \sqrt{3}$;

$MN = \sqrt{10}$ y $OB = BN(M \in \overline{AB})$

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

82. En un triedro $O - ABC$, la cara a mide 90° y las caras b y c miden 60° , en $\overline{OA}$ se ubica el punto M , siendo L la proyección de M sobre la cara OBC ; además, por M se traza una recta perpendicular que interseca a $\overline{OL}$ en Q . Si $PQ = 4$ y $m\angle PQL = 15^\circ$, $P \in \overline{ML}$, calcule MP .

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2
D) 3 E) $\sqrt{3}$

83. Si los cuadrados $ABCD$ y $MNPQ$ (M, N, R y S son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$), respectivamente, se ubican en planos secantes, de modo que QLP es un triángulo equilátero ($L \in \overline{SR}$), calcule la medida del diedro que determina la región cuadrada $ABCD$ y la región equilátera QPL .

- A) 30° B) 45°
C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$
D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ E) 60°

84. Se sabe que $O-ABC$ es un triedro trirectángulo. Si $OA = OB = OC = 3$, calcule la distancia de A hacia el ortocentro de la región triangular ABC .

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

85. En las aristas OA , OB y OC de un triedro equilátero $O - ABC$, se ubican los puntos L , K y S , respectivamente, de modo que $OL = 6$; $OK = 4$; $OS = 2$ y la $m\angle SOK = 60^\circ$. Calcule el área de la región triangular LKS .

- A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $7\sqrt{3}$

86. Se tiene un triedro $O - ABC$ en el cual sus caras miden $b = 90^\circ$ y $c = 45^\circ$. Calcule la medida del diedro $\widehat{OC}$, si el diedro $\widehat{OB}$ mide 120° .

- A) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$
C) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$
D) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{7}$ E) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{2}$

87. Un triángulo equilátero DEF se proyecta ortogonalmente sobre un plano, determinándose el triángulo ABC cuyas regiones correspondientes son equivalentes. Sean M y T puntos medios de $\overline{FE}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, de modo que el ángulo determinado por $\overline{TM}$ y $\overline{CF}$ mide 30° . Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$.

- A) $\arcsen \frac{4\sqrt{3}}{7}$
B) $\arcsen \frac{2}{5}$
C) $\arcsen \frac{7}{8}$
D) $\arcsen \frac{7}{9}$
E) $\arcsen \frac{7}{6}$

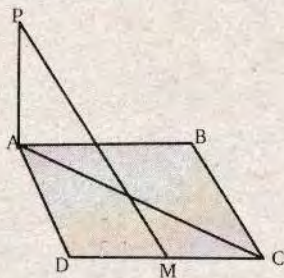
88. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, por A y C se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$ al plano que contiene a dicho triángulo, tal que los ángulos APB y BQC son complementarios y diferentes. Si $AP = BC$ y $AC = 2$, calcule el valor entero que puede tomar PQ.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

89. Sea ABCD un cuadrado. Se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ y $\overline{MQ}$ al plano que contiene a dicho cuadrado (P y Q en un mismo semiespacio). Si M es punto medio de $\overline{CD}$; $PB = AB = 2(MQ)$ y $BN = NC$ ($N \in \overline{BC}$), calcule la medida del ángulo que determinan $\overline{AP}$ y $\overline{NQ}$.

A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 90°

90. Del gráfico, $\overline{AP}$ es perpendicular al plano que contiene al cuadrado ABCD. Si: $PA = BC = 6$ y $MD = MC$, calcule la distancia entre $\overline{PM}$ y $\overline{AC}$.



A) 3 B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

91. Dado un triángulo ABC, de incentro I, donde $AB = 14$, $BC = 13$ y $AC = 15$. Si G es baricentro de la región ABC y la distancia de G a un plano que contiene a $\overline{BA}$ es 3, calcule la distancia de I a dicho plano.

A) 2 B) 3 C) 2,5
D) 1,8 E) 3,2

92. Se tiene el cuadrado ABCD, de centro O, y el triángulo equilátero AMB, ubicados en planos perpendiculares; además se traza la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$ perpendicular al plano del cuadrado y se ubica el punto medio P de $\overline{BC}$. Si G es baricentro de la región AMB y S el punto medio de $\overline{GP}$, calcule la medida del ángulo que forman $\overline{OS}$ con el plano que contiene al cuadrado.

A) $\arctan(\sqrt{7})$ B) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$
C) $\arctan(\sqrt{5}-1)$
D) $\arctan(\sqrt{6})$ E) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\right)$

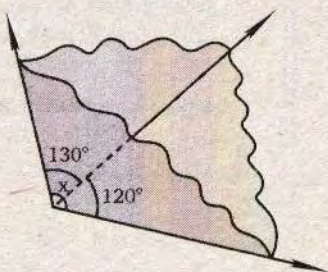
93. Se traza $\overline{HQ}$ perpendicular al plano del triángulo ABM de modo que:
 $m\angle BQM = m\angle BAM$, $m\angle AHB = 90^\circ$
 $m\angle QAM = 45^\circ$, $m\angle AQB + m\angle QAB = 120^\circ$. Calcule la $m\angle AQB$.

A) 45 B) 50 C) 55
D) 60 E) 72

94. Si por el vértice A de un triángulo ABC se traza una perpendicular $\overline{AD}$ al plano del triángulo, luego por el vértice A se trazan las perpendiculares $\overline{AM}$ a $\overline{BD}$ y $\overline{AN}$ a $\overline{CD}$, entonces el cuadrilátero BMNC es:
- A) Equiángulo B) Circunscriptible
C) Inscriptible
D) Un trapecio E) Un trapecoide
95. ABCD y CFED son regiones cuadradas contenidas en planos perpendiculares, "M" es punto medio de $\overline{EF}$ y "N" punto medio de $\overline{BM}$. Si $AB = 2a$ entonces $\overline{DN}$ mide:
- A) $\frac{\sqrt{19}}{2}a$ B) $\frac{\sqrt{17}}{2}a$ C) $\frac{\sqrt{15}}{2}a$
D) $\frac{\sqrt{13}}{2}a$ E) $\frac{\sqrt{11}}{2}a$
96. En un triedro O - ABC, los diedros $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ miden 164° . Calcule la medida del diedro $\overrightarrow{OA}$, si su medida es menor a 150° y es entero.
- A) 145° B) 130° C) 140°
D) 149° E) 148°
97. ABC es un triángulo equilátero y DBC es un triángulo rectángulo contenidos en planos perpendiculares, $AC = 8$; $DC = 4$. Determine la medida de la cara ADC en el triedro D - ABC.
- A) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$
C) $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$
D) $\arccos\left(\frac{1}{5}\right)$ E) $\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$
98. Se traza BQ perpendicular al plano que contiene a los cuadrados ABCD y CGFE tal que $\overline{BE} \cap \overline{GD} = \{P\}$. Si $BP = 4$ y $BQ = PE = 3$, calcule el área de la región triangular DQG (en u^2).
- A) $\frac{35}{3}$ B) $\frac{35}{2}$ C) $\frac{37}{2}$
D) 16 E) 7
99. En un triedro trirectángulo O - ABC se ubica el punto P interior a dicho ángulo triedro, luego se proyecta el segmento $\overline{OP}$ sobre las caras del ángulo triedro, si la suma de los cuadrados de sus respectivas proyecciones es $50u^2$. Calcular la longitud de $\overline{OP}$.
- A) 3 u B) 4 u C) 5 u
D) 6 u E) 7 u
100. Se tiene un cuadrado ABCD y una semicircunferencia de diámetro AB ubicados en planos perpendiculares y se ubica el punto medio N de $\overline{AB}$; luego se traza $\overline{CM}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado de modo que $CM = CD$. Si G_1 y G_2 son baricentros de las regiones BCD y CMD, respectivamente, calcule la medida del ángulo que determinan $\overrightarrow{G_1G_2}$ y $\overline{BN}$.
- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 37°

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución 1:



Se sabe que: $130^\circ - 120^\circ < x < 130^\circ + 120^\circ$

$$10^{\circ} < x < 250^{\circ}$$

También: $0^\circ < x + 120^\circ + 130^\circ < 360^\circ$

$$0^\circ < x + 250^\circ < 360^\circ$$

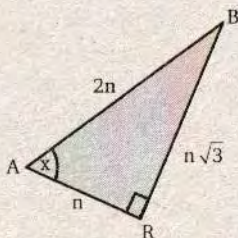
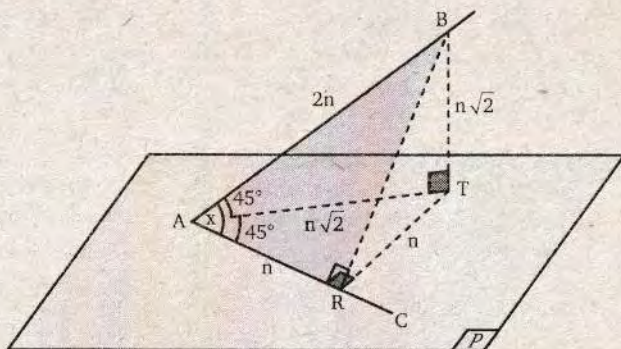
$x < 110^\circ$

Luego: $10^\circ < x < 110^\circ$

$$\therefore X_{\text{máx. entero}} = 109^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 2:



Δ ABT: Notable de 45°;

$$AB = 2n$$

Δ ART: Notable de 45°;

$$AR = n$$

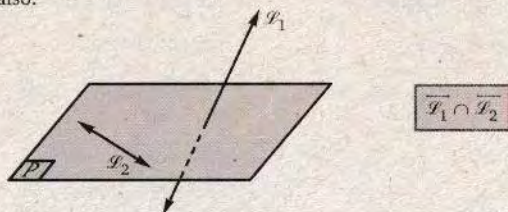
$\overline{BR} \perp \overline{AC}$: Teorema de las tres perpendiculares

Δ ABR: Notable de 30° y 60°

$$\therefore x = 60^\circ$$

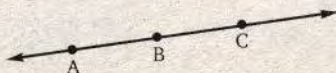
Rpta.: B

Resolución 3: I) Falso.

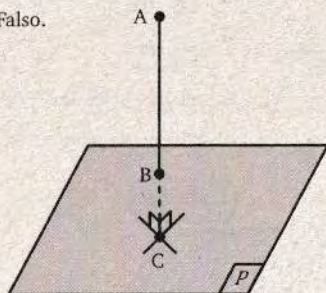


II) Falso.

Si los tres puntos son colineales, no determinan un plano.



III) Falso.



En el gráfico la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\square P$ es el punto C.

∴ La secuencia correcta es: FFF

Rpta.: D

Resolución 4: Postulado:

Tres puntos no colineales determinan un único plano al cual pertenecen.

Entonces:

$$\# \text{ Máximo de planos} = C_3^7 = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!}$$

$$\# \text{ Máximo de planos} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{4! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$\# \text{ Máximo de planos} = 35$$

Rpta.: A

Resolución 5: Teorema: Dos rectas paralelas determinan un único plano, al cual pertenecen.

Entonces: $\# \text{ Máximo de planos} = C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!}$

$\# \text{ Máximo de planos} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

Rpta.: C

Resolución 6: Con 8 rectas: $C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{7 \times 8}{2} = 28$

Con 6 puntos: $C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{6} = 20$

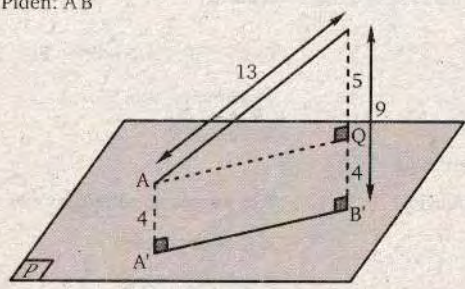
Con 8 rectas y 6 puntos: $8 \times 6 = 48$

Entonces: $N^\circ \text{ máximo de planos} = 28 + 20 + 48$

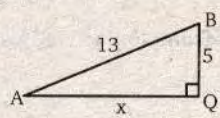
$\therefore N^\circ \text{ máximo de planos} = 96$

Rpta.: E

Resolución 7: Piden: $A'B'$



Se observa:



Por el teorema de Pitágoras:

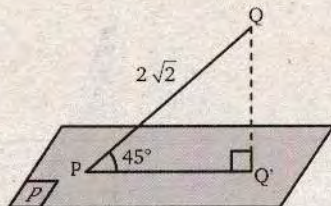
$$13^2 = 5^2 + x^2$$

$$x = 12$$

$$\therefore A'B' = 12\text{cm}$$

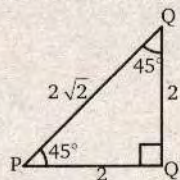
Rpta.: D

Resolución 8:



Piden: PQ'

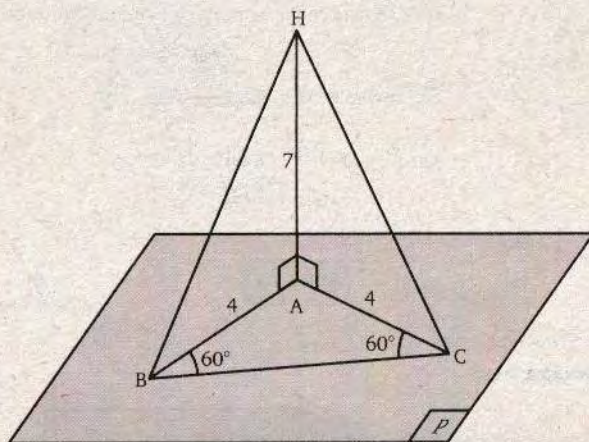
$\Delta PQQ'$: Notable de 45°



$$\therefore PQ' = 2 \text{ m}$$

Rpta.: C

Resolución 9:



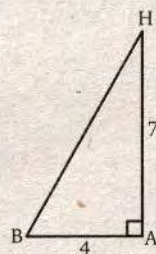
Teorema de Pitágoras: $(HB)^2 = 7^2 + 4^2$

Se observa en la figura:

$$HB = \sqrt{65}$$

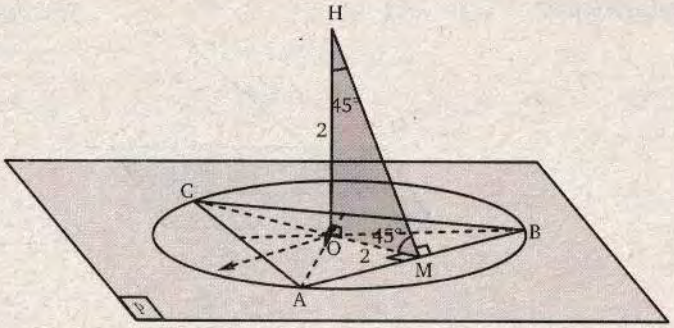
$$\rightarrow HB = HC = \sqrt{65}$$

$$\therefore HB + HC = 2\sqrt{65} \text{ cm}$$



Rpta.: B

Resolución 10:



Piden : $d_{(H \rightarrow \overline{AB})} = HM$

$HM \perp AB$: Teorema de las tres perpendiculares.

“O”: Circuncentro, ortocentro, incentro, baricentro del ΔABC .

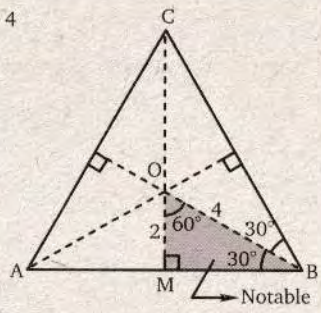
$$AO = OB = OC = 4$$

Se observa en el plano del ΔABC :

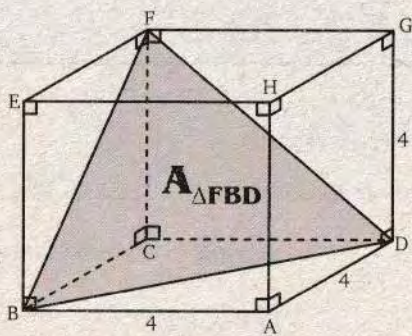
Luego: $\angle HOM$: Notable de 45°

$$\therefore HM = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

Rpta.: A

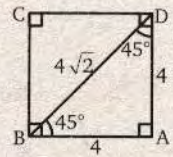


Resolución 11:



Piden: $A_{\Delta FBD}$

Se observa que:



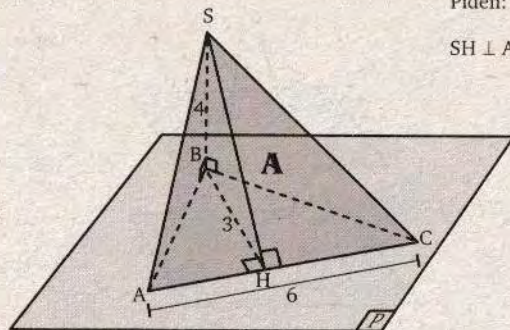
Además la región sombreada es equilátera; formada por las diagonales de 3 caras del cubo.

$$\rightarrow BD = FD = BF = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore A_{\Delta FBD} = \frac{(4\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_{\Delta FBD} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Rpta.: D

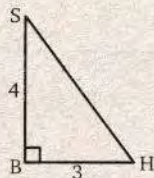
Resolución 12:



Piden: $A_{\Delta ASC}$

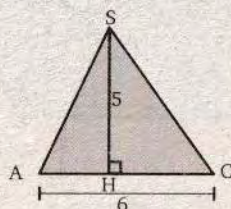
$SH \perp AC$: Teorema de las 3 perpendiculares.

Se observa:



$$\rightarrow SH = 5$$

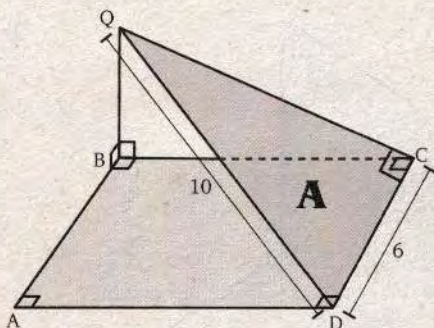
Luego:



$$\therefore A_{\Delta ASC} = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Rpta.: B

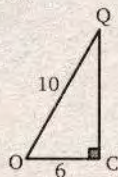
Resolución 13:



Piden: $A_{\Delta QDC}$

$\overline{QC} \perp \overline{DC}$: Teorema de las 3 perpendiculares.

Se observa:



$$\rightarrow QC = 8$$

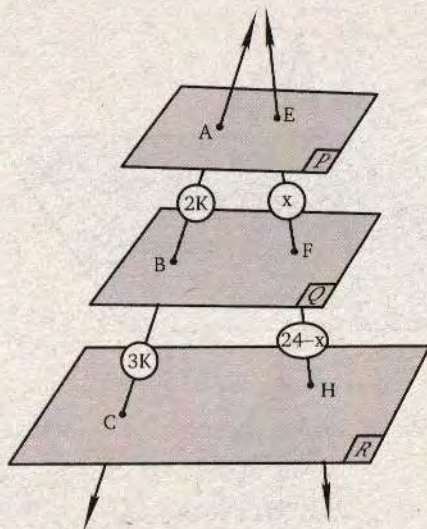
Luego:

$$A_{\Delta QDC} = \frac{8 \times 6}{2}$$

$$\therefore A_{\Delta QDC} = 24 \text{ cm}^2$$

Rpta.: B

Resolución 14:



Piden : $EF = x$

Datos : $EH = 24$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$$

Tenemos : $AB = 2K$

$$BC = 3K$$

Por el teorema de Thales:

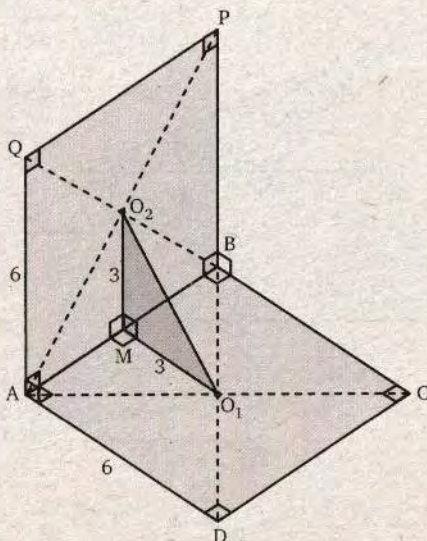
$$\frac{2K}{3K} = \frac{x}{24 - x}$$

$$x = \frac{48}{5}$$

$$\therefore x = 9,6$$

Rpta.: E

Resolución 15:



Piden: O_1O_2

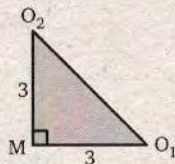
▢ ABD : Base media

$$O_1M = 3$$

▢ ABQ : Base media

$$O_2M = 3$$

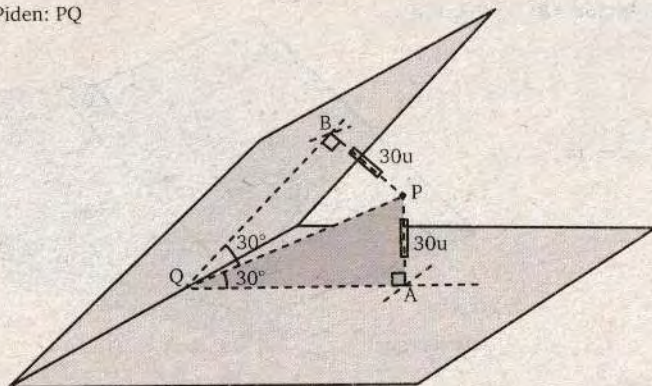
Luego:



$$\therefore O_1O_2 = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Rpta.: D

Resolución 16: Piden: PQ

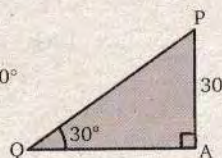


$$\triangle QBP \cong \triangle QAP \text{ (Caso: L. L. } A_{\text{mayor}}).$$

$$\rightarrow m\angle BQP = m\angle PQA = 30^\circ$$

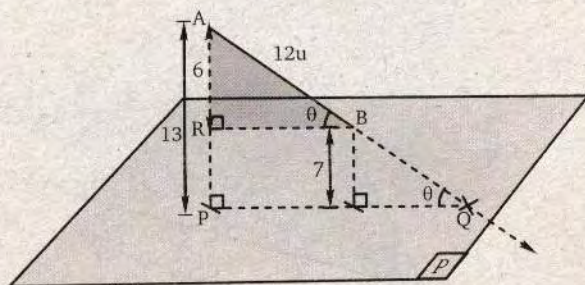
Luego: $\triangle QPA$ (Notable de 30° y 60°)

$$\therefore QP = 60u$$



Rpta.: D

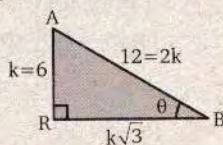
Resolución 17:



Trazamos $\overline{RB} \parallel \overline{PQ}$. $m\angle BPQ = m\angle ABR = \theta$ ($\angle$ s correspondientes).

Se observa: $\triangle ARB$ (Notable 30° y 60°)

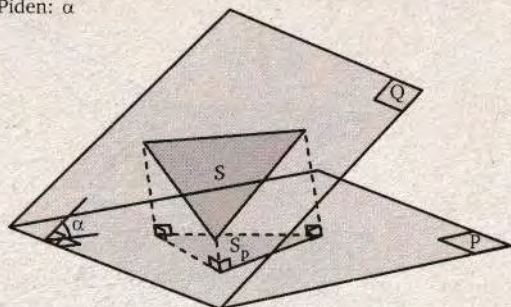
$$\therefore \theta = 30^\circ$$



Rpta.: B

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 08

Resolución 18: Piden: α



S : Área de la región proyectada

S_p : Área de la proyección.

α : $m\angle$ diedro determinado por los planos P y Q

Sabemos que: $S_p = S \cos \alpha \dots\dots(1)$

Por datos del problema: $S_p = \frac{S}{2} \dots\dots(2)$

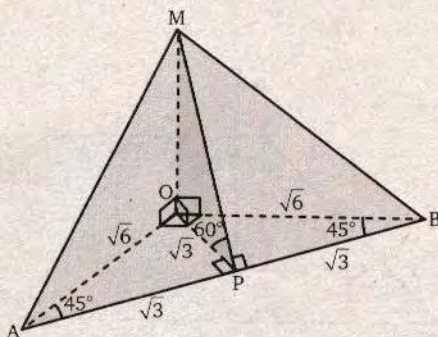
Luego: Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{S}{2} = S \times \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

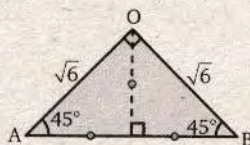
Rpta.: D

Resolución 19:



Piden: OM

Se observa: $\triangle AOB$
(notable 45°)



$$AB = 2\sqrt{3}$$

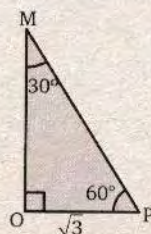
$$\rightarrow AP = PB = PO = \sqrt{3}$$

Luego: $\triangle MOP$ (Notable 60° y 30°):

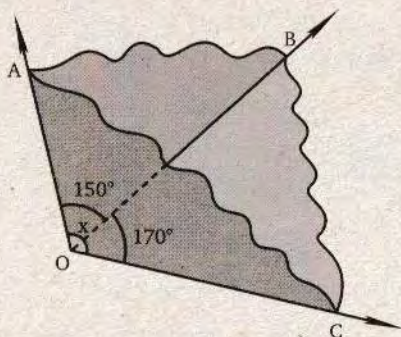
$$\rightarrow OM = \sqrt{3}(\sqrt{3})$$

$$\therefore OM = 3u$$

Rpta.: A



Resolución 20:



Sabemos que:

$$170^\circ - 150^\circ < x < 150^\circ + 170^\circ$$

$$20^\circ < x < 320^\circ$$

También:

$$0^\circ < x + 150^\circ + 170^\circ < 360^\circ$$

$$x + 320^\circ < 360^\circ$$

$$x < 40^\circ$$

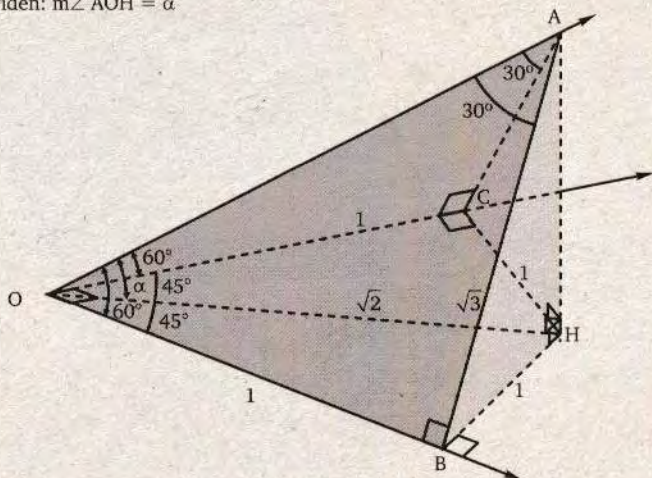
Luego:

$$20^\circ < x < 40^\circ$$

$$\therefore x_{\text{máx. entero}} = 39^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 21: Piden: $m\angle AOH = \alpha$



Teorema de las tres perpendiculares:

$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{HB} \wedge \overline{HB} \perp \overline{OB} \rightarrow \overline{AB} \perp \overline{OB} \\ \overline{AH} \perp \overline{HC} \wedge \overline{HC} \perp \overline{OC} \rightarrow \overline{AC} \perp \overline{OC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle AOB \cap \angle AOC \text{ (Teorema de Pitágoras).}$$

$$\Rightarrow \angle ACH \cong \angle ABH \rightarrow HC = HB = 1$$

$$\Rightarrow \angle OHC \cong \angle OHB \rightarrow m\angle HOB = m\angle HOC = 45^\circ$$

$\triangle OHD$ (Notable de 45°):

$$OB = BM = 1$$

$\triangle ABH$ (Teorema de Pitágoras):

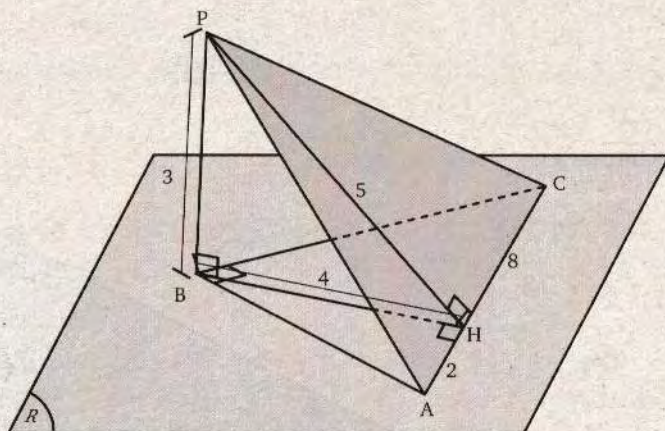
$$\sqrt{3}^2 = 1^2 + (AH)^2 \rightarrow AH = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \triangle AOH \text{ (} AH = NO = \sqrt{2} \text{)}$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 22:



Piden: $A_{\triangle APC}$

En el $\triangle CBA$: Por relaciones métricas:

$$(BH)^2 = (2)(8)$$

$$\rightarrow BH = 4$$

También: $\overline{PH} \perp \overline{AC}$: Teorema de las tres perpendiculares.

$\triangle PBH$ (Notable de 53° y 37°):

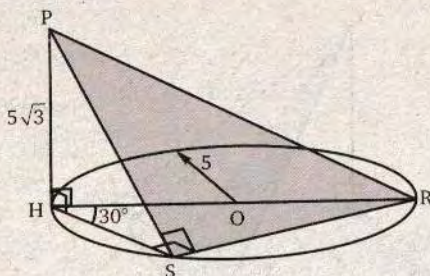
$$PH = 5$$

Por último:
$$A_{\triangle APC} = \frac{10 \times 5}{2}$$

$$\therefore A_{\triangle APC} = 25 u^2$$

Rpta.: B

Resolución 23:



Piden: $A_{\Delta PSR}$

$\overline{HR}$: Diámetro ($HR = 10$)

$\rightarrow m\angle HSR = 90^\circ$

$\triangle HSR$: Notable 30° y 60°

$\rightarrow HS = 5\sqrt{3} \wedge SR = 5$
 $SR = 5$

$\overline{PS} \perp \overline{RS}$: Teorema de las tres perpendiculares.

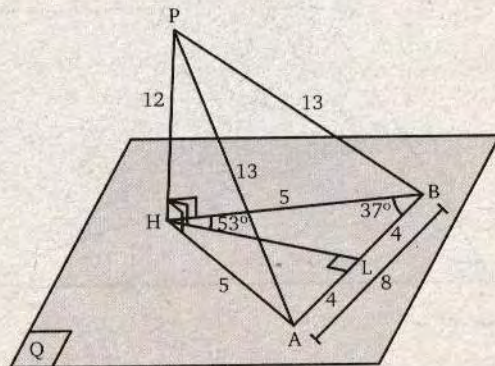
$\triangle PHS$: Pitágoras: $PS = 5\sqrt{6}$

Luego: $A_{\Delta PSR} = \frac{(5\sqrt{6})(5)}{2}$

$$\therefore A_{\Delta PSR} = \frac{25\sqrt{6}}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 24:



Piden: HL

$\overline{PH} \perp \square Q$

$\rightarrow \overline{PH} \perp \overline{HA}$

$\overline{PH} \perp \overline{HB}$

$\triangle PHA$: (Teorema de Pitágoras) $HA = 5$

$\triangle BPH \cong \triangle APH$: $BH = HA = 5$

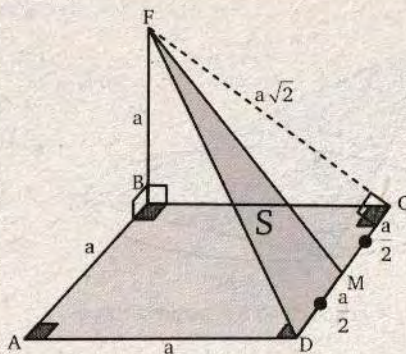
$\triangle AHB$: Isósceles: $AL = LB = 4$

$\triangle BHL$: Notable de 37° y 53°

$\therefore HL = 3$

Rpta.: C

Resolución 25:



Piden: S

$\overline{FC} \perp \overline{CD}$: Teorema de las tres perpendiculares.

$\triangle BFC$: Notable de 45°

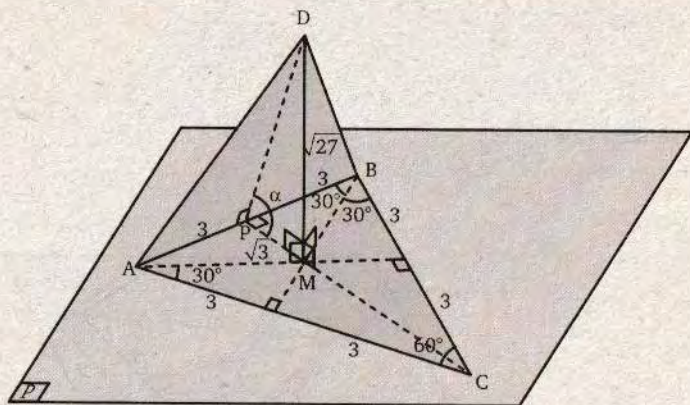
$$FC = a\sqrt{2}$$

$$S = \frac{\frac{a}{2} \times a\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Rpta.: A

Resolución 26:



Piden: " α "

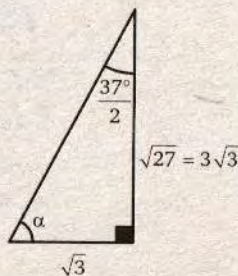
"M": Baricentro ($\triangle ABC$)

$$\rightarrow PM = \sqrt{3}$$

Se observa:

$\triangle PMD$

$$\therefore \alpha = \frac{143^\circ}{2}$$



Rpta.: D

Resolución 27: Piden: $A_{\triangle ABC}$

Del gráfico :

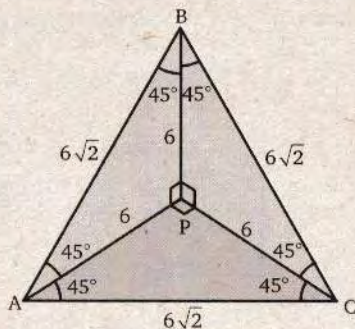
$$AB = BC = AC = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

$\triangle ABC$: Equilátero

$$\rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{(6\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4}$$

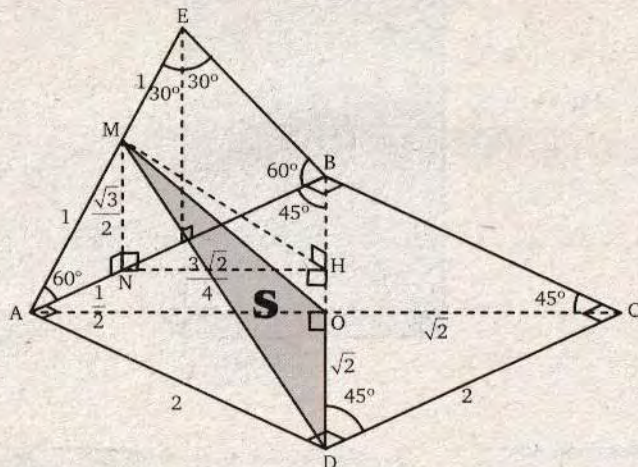
$$A_{\triangle ABC} = \frac{36(2)\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore A_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3} \text{ m}^2$$



Rpta.: B

Resolución 28:



Piden : $A_{\triangle MOD} = S$

$\overline{MH} \perp \overline{HD}$ (Teorema de las tres perpendiculares).

$\triangle AMN$ (Notable de 30° y 60°):

$$AN = \frac{1}{2} \wedge MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow NB = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$\triangle BNH$ (Notable de 45°):

$$NH = NB = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Piden: $m\angle POH = \alpha$

$\triangle COD$ (Notable de 45°):

$$CH = HD = HO = a \Rightarrow R = a\sqrt{2}$$

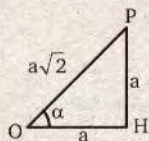
Dato:

$$S_{PCD} = \frac{R^2}{2}$$

$$\frac{(2a)(h)}{2} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{2}$$

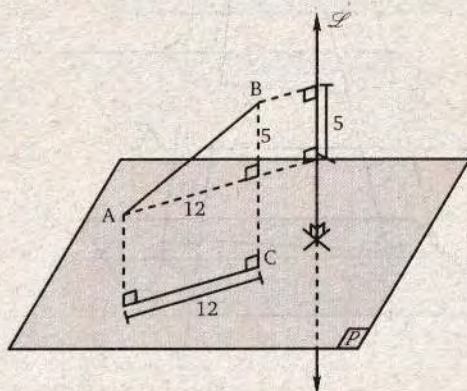
$$\Rightarrow h = a$$

$$\therefore \alpha = 45^\circ$$



Rpta.: E

Resolución 31:



Piden: AB

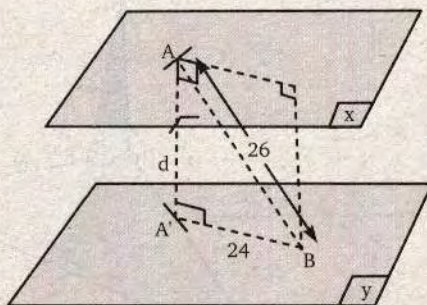
$\triangle ABC$ (Teorema de Pitágoras):

$$(AB)^2 = (12)^2 + 5^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

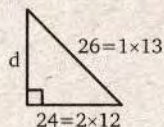
Rpta.: C

Resolución 32:



Piden: $d(\square x; \square y)$

Se observa:



$$\Rightarrow d = 2 \times 5$$

$$\therefore d = 10 \text{ cm}$$

Rpta.: A

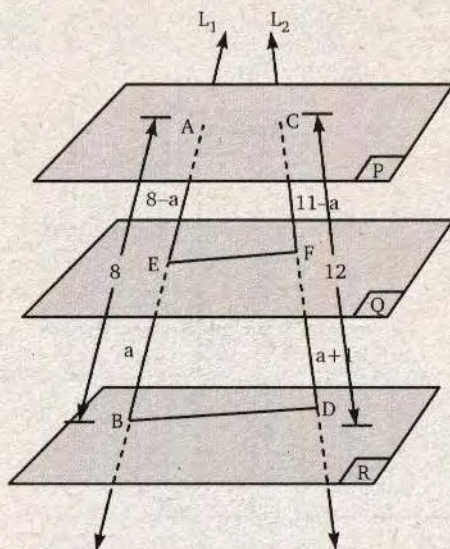
Resolución 33: Con "n" rectas secantes : $C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{(n-1)(n)}{2} = 45$

$$(n-1)(n) = 90$$

$$n = 10$$

Rpta.: B

Resolución 34:



Piden: CF

Dato:

$$FD - EB = 1$$

$$FD = EB + 1$$

$$FD = a + 1$$

Teorema de Thales:

$$\frac{8-a}{a} = \frac{11-a}{a+1}$$

$$(8-a)(a+1) = (11-a)(a)$$

$$8a + 8 - a^2 - a = 11a - a^2$$

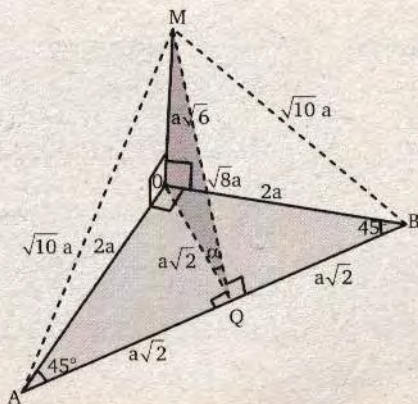
$$a = 2$$

$$CF = 11 - 2$$

$$\therefore CF = 9m$$

Rpta.: D

Resolución 35:



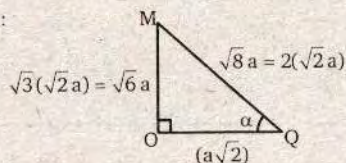
Piden: $m\angle MQB = \alpha$

$\triangle AMB$ (isósceles) $AM = MB = \sqrt{10} a$

$\triangle MQB$ (Teorema de Pitágoras)

$$MQB : MQ = \sqrt{8} a$$

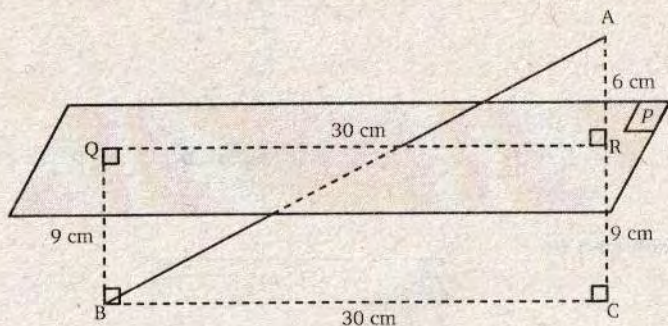
Se observa:



$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

Rpta.: D

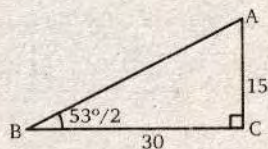
Resolución 36:



Piden: AB

Proyección de $\overline{AB}$ sobre: $\square P$; $\overline{QR}$

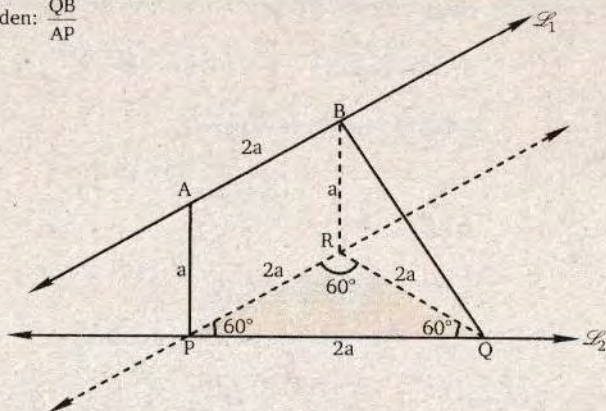
Se observa:



$$\therefore AB = 15\sqrt{5}$$

Rpta.: A

Resolución 37: Piden: $\frac{QB}{AP}$



Dato: $AB = PQ = 2(PA)$

$\triangle PQR$ (Equilátero) $RQ = 2a$

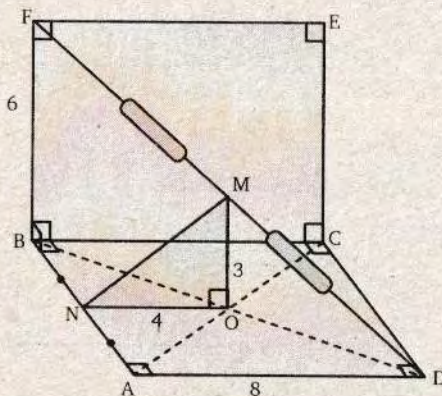
$\angle QBR$ (Notable de $53^\circ/2$): $BQ = a\sqrt{5}$

$$\frac{QB}{AP} = \frac{a\sqrt{5}}{a}$$

$$\therefore \frac{QB}{AP} = \sqrt{5}$$

Rpta.: D

Resolución 38:



Piden: MN

Base media: $\triangle FBD$

MO = 3

Base media: $\triangle BAD$

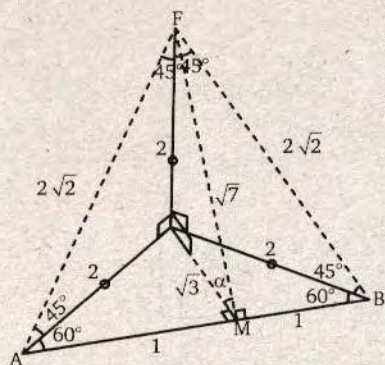
NO = 4

$\angle MNO$ (Notable de 37° y 53°)

$\therefore MN = 5$

Rpta.: C

Resolución 39:



Piden: " α " (Sin pérdida de la generalidad asignaremos longitud 2 al lado del triángulo equilátero ABC).

ΔABC (Equilátero)

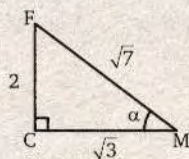
$$CF = AB = BC = AC = 2a$$

$$AM = MB = a \wedge CM = a\sqrt{3}$$

$FM \perp AB$ (Teor. 3 perpendicular)

$$\Delta FMB: \text{Teorema de Pitágoras: } (2\sqrt{2})^2 = 1^2 + (FM)^2 \rightarrow FM = \sqrt{7}$$

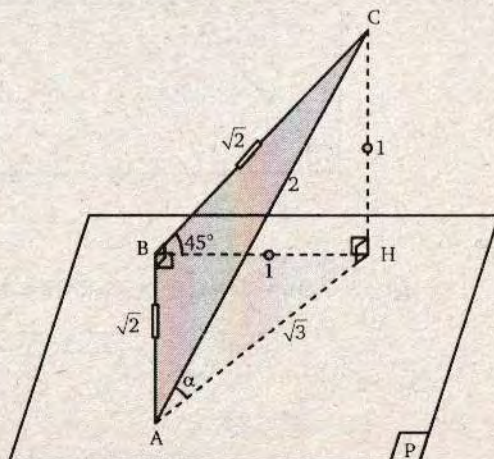
Se observa:



$$\therefore \alpha = \text{Arc sen} \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Rpta.: B

Resolución 40:



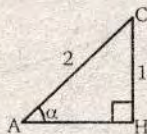
Piden: " α "

$\angle BCH$ (Notable de 45°):

$$BH = HC = 1 \wedge BC = \sqrt{2}$$

$\angle ABC$ (Notable de 45°):

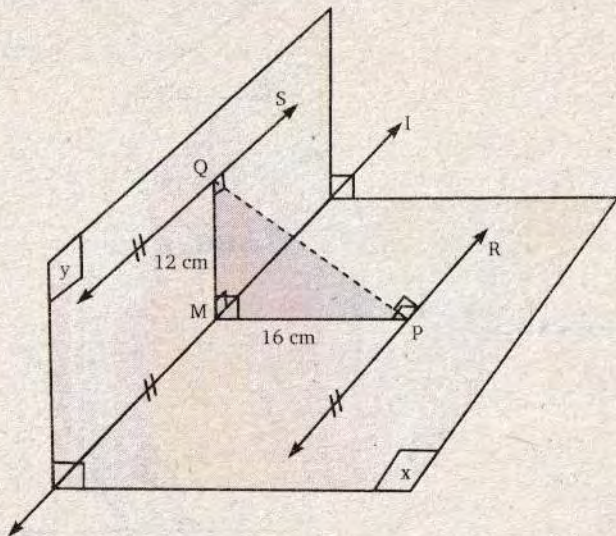
$$AB = BC = \sqrt{2} \rightarrow AC = 2$$



$$\therefore \alpha = 30^\circ$$

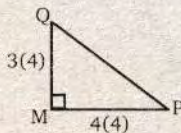
Rpta.: B

Resolución 41:



Piden: PQ

$\overline{QP} \perp \overline{R}$ (Teorema de las tres perpendiculares)

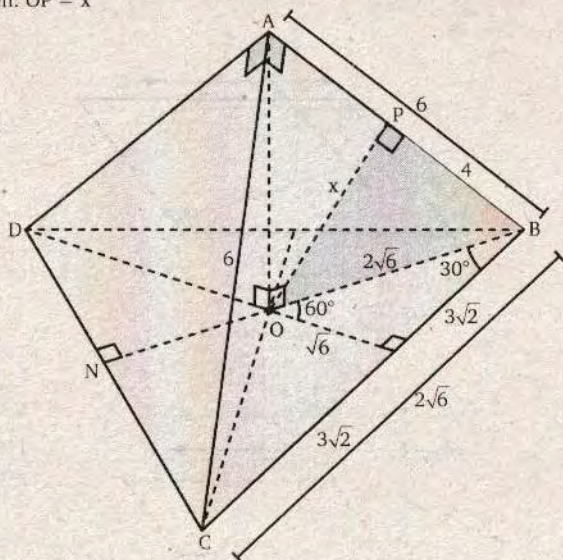


$$\Rightarrow QP = 5(4)$$

$$\therefore QP = 20 \text{ cm}$$

Rpta.: E

Resolución 42: Piden: $OP = x$



O: Baricentro $\triangle BCD$ (Equilátero)

$\triangle ABC$ (Notable de 45°): $AB = 6 \rightarrow BC = 6\sqrt{2}$

$$\rightarrow BM = MC = a\sqrt{2}$$

$\triangle BOM$ (Notable de 30° y 60°): $OM = \sqrt{6} \wedge OB = 2\sqrt{6}$

$\triangle AOB$ (Relación métrica): $(2\sqrt{6})^2 = 6(PB) \rightarrow PB = 4$

$\triangle BPO$ (Teorema de Pitágoras):

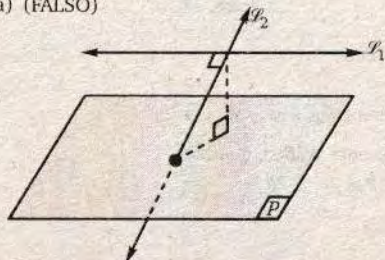
$$(2\sqrt{6})^2 = 4^2 + x^2$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 43: Sea $\mathcal{P}_1 \parallel \square P$; entonces:

a) (FALSO)

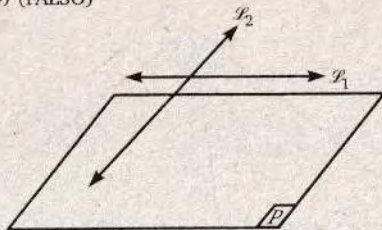


$$\overline{P_2} \perp \overline{P_1}$$

pero:

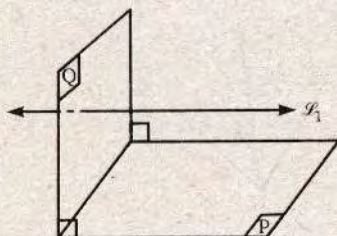
$$\overline{P_2} \not\perp \square P$$

b) (FALSO)



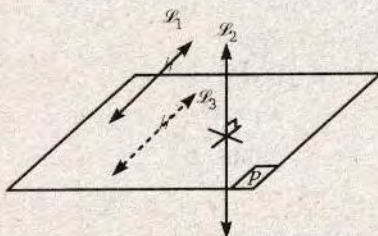
Sea: $\overline{l_2} // \square P$
pero
 $\overline{l_2} \nparallel \overline{l_1}$

c) (FALSO)



$\square Q \perp \square P$
pero
 $\square Q \nparallel \overline{l_1}$

d) (VERDADERO)



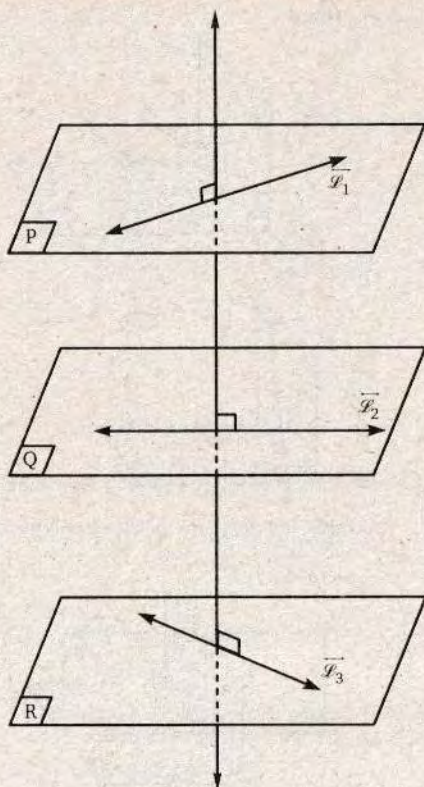
Una recta perpendicular a un plano es perpendicular a todas las rectas de dicho plano.

$$\overline{l_1} // \overline{l_3} \Rightarrow \overline{l_2} \perp \overline{l_3}$$

$$\therefore \overline{l_2} \perp \overline{l_1}$$

Rpta.: E

Resolución 44: Sea L perpendicular a $\overline{l_1}$; $\overline{l_2}$ y $\overline{l_3}$; según el siguiente gráfico, donde
 $\square P // \square Q // \square R$

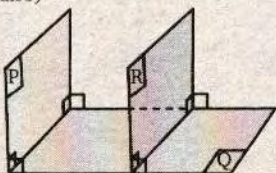


- a) FALSO; pues l_1 , l_2 y l_3 no son paralelas.
 b) FALSO; pues $l_1 \in \square P$; $l_2 \in \square Q$; $l_3 \in \square R$.
 c) VERDADERO; según las condiciones del gráfico.
 d) FALSO; ya que es la negación de la proposición (c).

Rpta.: C

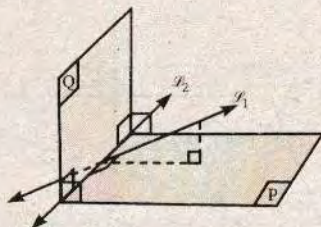
Resolución 45: Sea $\square P \perp \square Q$

- a) (Falso)



$\square R$ es perpendicular al $\square Q$
 sin embargo no lo es al $\square P$

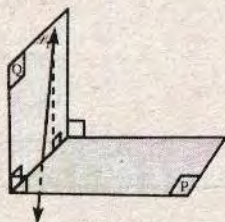
b) (Falso)



$$\overline{l_1} \perp \overline{l_2}$$

Pero $\overline{l_1} \not\subset \square P \wedge \overline{l_2} \not\subset \square Q$

c) (Falso)

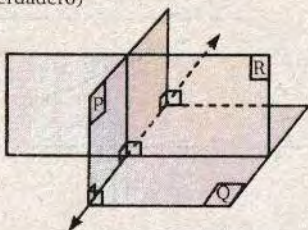


$$\overline{l_1} \subset \square P$$

Sin embargo $\overline{l_1}$ no es perpendicular al $\square Q$
($\theta \neq 90^\circ$)

d) Falso: Dos planos perpendiculares se intersectan en una recta.

e) (Verdadero)



$$\square P \cap \square Q = \overline{l}$$

$$\square R \perp \overline{l}$$

Como $\overline{l} \subset \square P \wedge \overline{l} \subset \square Q$

$\rightarrow \square R$ es perpendicular a toda recta de $\square P \cap \square Q$

$$\therefore \square R \perp \square P \wedge \square R \perp \square Q$$

Rpta.: E

Resolución 46:Piden : $MN = x$

$$AB = MT = CP = 4$$

$$MN = CQ = x$$

PCD (Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa):

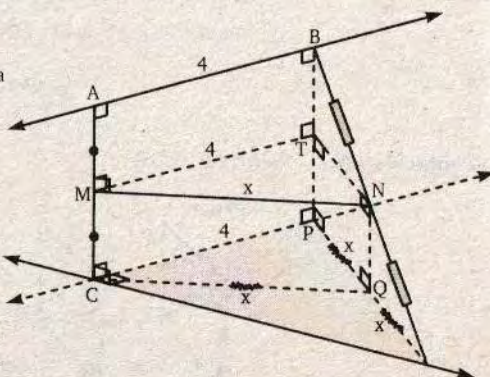
$$PQ = QD = CQ = x$$

PCD (Teorema de Pitágoras):

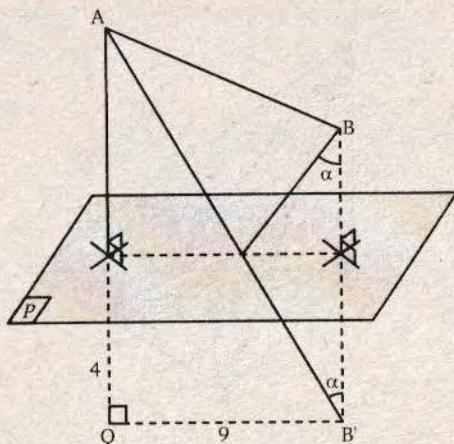
$$(2x)^2 = 4^2 + 6^2$$

$$\therefore x = \sqrt{13}$$

Rpta.: C



Resolución 47:



Piden : Mínimo recorrido de A a B pasando por $\square P$: $AC + CB = x$.

Ubicamos B' simétrico de B con respecto al plano P $\rightarrow BC = CB'$

$\Rightarrow AB'$: mínimo recorrido

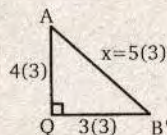
$\rightarrow x = AC + CB'$

Para ello A; C y B' deben ser colineales.

$\rightarrow x = AB'$

Se observa:

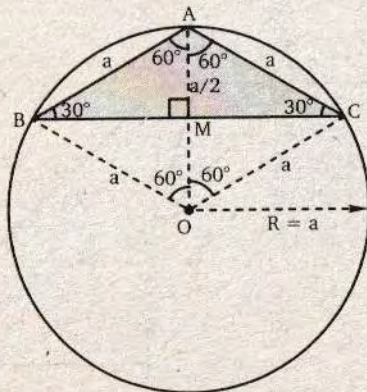
$\therefore AB' = 15 \text{ cm}$



Rpta.: A

Resolución 48:

Analicemos el plano del $\triangle ABC$:



$\square ABOC$: Rombo

$\triangle AOB$: Equilátero

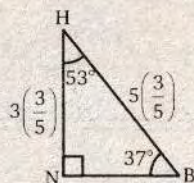
$\triangle AMB$ (Notable de 30° y 60°):

$$AM = \frac{a}{2}$$

y de acuerdo a las condiciones del problema tendremos el siguiente gráfico:

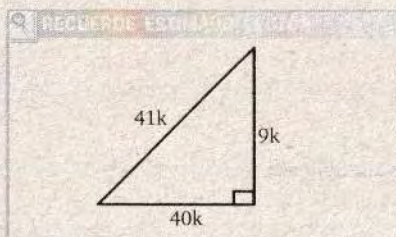
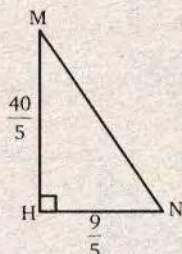
$$\therefore x = a\sqrt{\frac{13}{12}}$$

△ BHN (Notable de 37° y 53°)



$$\rightarrow \text{HN} = \frac{9}{5}$$

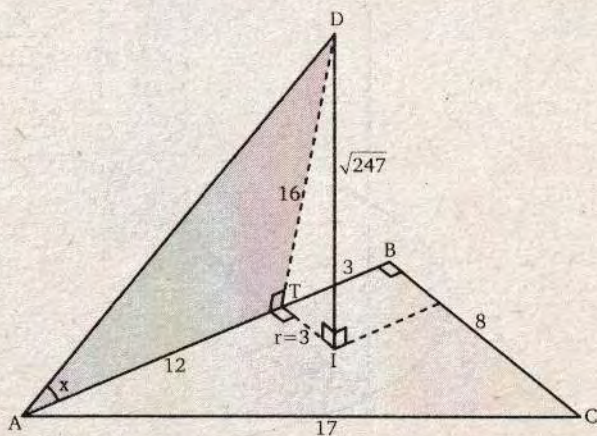
 MHN:



$$\therefore x = \frac{41}{5}$$

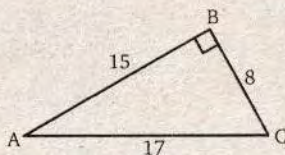
Rpta.: A

Resolución 51:



Piden : $m \triangleleft \text{DAB} = x$.

ΔABC : Triángulo rectángulo



 $\triangle ABC$ (Teorema de Poncelet):

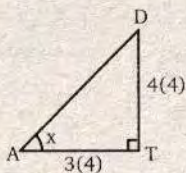
$$15 + 8 = 17 + 2r \rightarrow r = 3$$

$$\rightarrow BT = 3 \wedge TA = 12$$

 DIT: Teorema de Pitágoras

$$(DT)^2 = \sqrt{247}^2 + 3^2 \rightarrow DT = 16$$

Se observa:

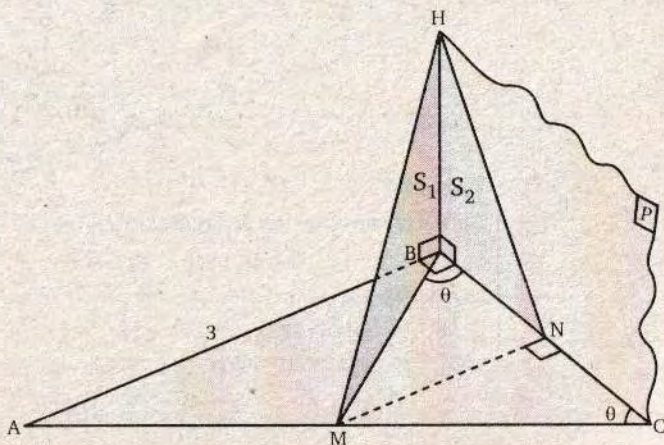


△ Notable de 37° y 53° :

$$\therefore x = 53^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 52:



Piden: AC

Datos :

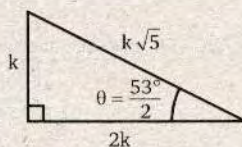
$$S_1 = 5\sqrt{5} \wedge S_2 = 10$$

Teorema :

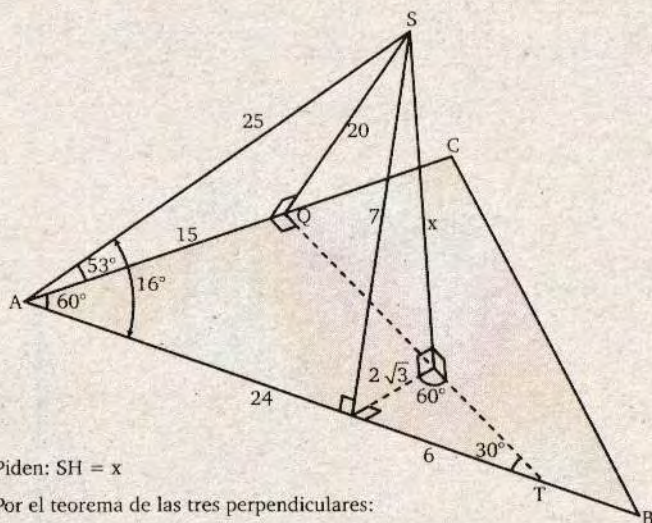
$$S_2 = S_1 \cos \theta$$

$$\Rightarrow 10 = 5\sqrt{5} \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

En el problema : $k = 3$

$$\therefore AC = 3\sqrt{5} \text{ m}$$

Rpta.: E**Resolución 53:**Piden: $SH = x$

Por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{SP} \perp \overline{AB} \wedge \overline{SQ} \perp \overline{AC}.$$

$$\angle ASP \text{ (Notable de } 16^\circ \text{ y } 74^\circ): AP = 24$$

$$\angle ASQ \text{ (Notable de } 37^\circ \text{ y } 53^\circ): AQ = 15$$

$$\angle ATQ \text{ (Notable de } 30^\circ \text{ y } 60^\circ): AT = 2(AQ)$$

$$\rightarrow AT = 30$$

$$\rightarrow PT = 6$$

$\triangle THP$ (Notable de 30° y 60°):

$$PH = 2\sqrt{3}$$

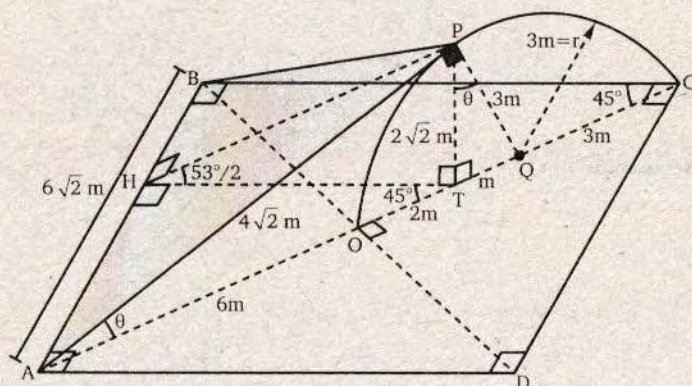
$\triangle PSH$ (Teorema de Pitágoras):

$$7^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2$$

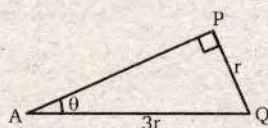
$$\therefore x = \sqrt{37} \text{ cm}$$

Rpta.: A

Resolución 54:



Piden: S_{APB}



Sea: $r = 3m$

$\triangle PQT \sim \triangle AQP \rightarrow PQ = 3m \wedge TQ = m$

$\rightarrow QC = 3m; OT = 2m$ y $AO = 6m$

$\triangle ATH$ (Notable de 45°):

$$AT = 8m \rightarrow TH = 4\sqrt{2}m$$

$\triangle ACB$ (Notable de 45°):

$$AC = 12m \rightarrow AB = 6\sqrt{2}m$$

$\triangle PQT$ (Teorema de Pitágoras):

$$PT = 2\sqrt{2}m$$

$\triangle HPT$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$):

$$HP = 2\sqrt{2}m(\sqrt{5})$$

Luego :
$$S_{APB} = \frac{(6\sqrt{2} \text{ m})(2\sqrt{2} \text{ m} \sqrt{5})}{2}$$

$$\Rightarrow S_{APB} = 12\sqrt{5} \text{ m}^2 \dots\dots(I)$$

En el problema : $AB = \sqrt{2}$

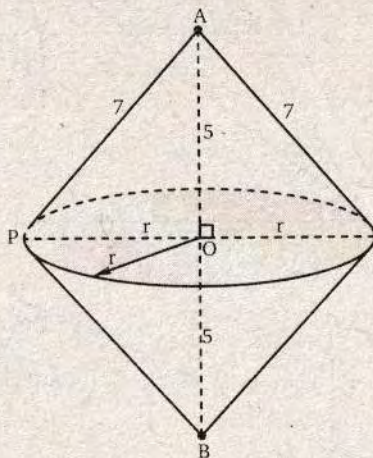
$$\rightarrow 6\sqrt{2} \text{ m} = \sqrt{2} \rightarrow m = \frac{1}{6} \dots\dots(II)$$

(II) en (I) :
$$S_{APB} = 12\sqrt{5} \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\therefore S_{APB} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^2$$

Rpta.: E

Resolución 55:



Piden el área "S" de la región limitada por el lugar geométrico que forma el punto "P"; el cual será un círculo de radio "r".

△ PAO (Teorema de Pitágoras):

$$7^2 = 5^2 + r^2$$

$$r = 2\sqrt{6}$$

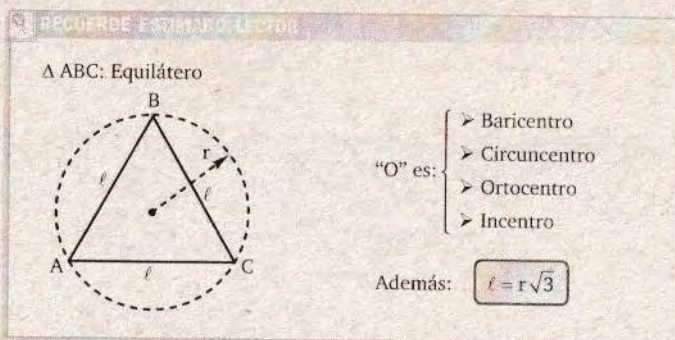
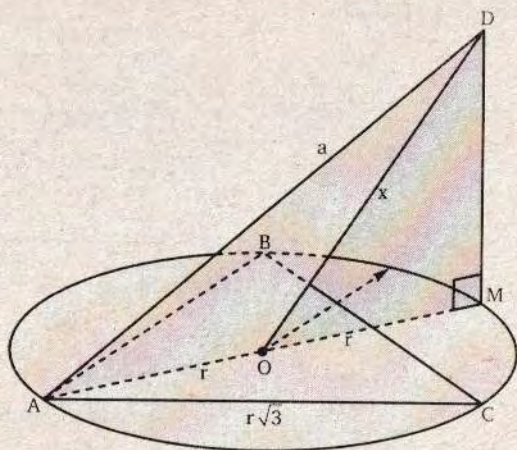
Entonces:

$$S = \pi r^2 = \pi(2\sqrt{6})^2$$

$$\therefore S = 24\pi \text{ m}^2$$

Rpta.: C

Resolución 56:

Piden : $DO = x$

Dato :

$$(AD)^2 - (AC)^2 = 3$$

$$\rightarrow a^2 - (r\sqrt{3})^2 = 3$$

$$a^2 - 3r^2 = 3 \dots\dots (I)$$

M es punto medio de $\widehat{BC}$: $\rightarrow A; O \text{ y } M \text{ son colineales.}$ ΔADO (Teorema de las proyecciones):

$$a^2 - x^2 = (2r)^2 - (r)^2$$

$$\rightarrow a^2 - 3r^2 = x^2 \dots\dots (II)$$

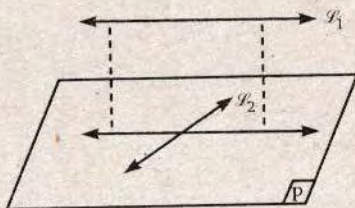
De (I) y (II):

$$x^2 = 3$$

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

Rpta.: A

Resolución 57: • (FALSO)



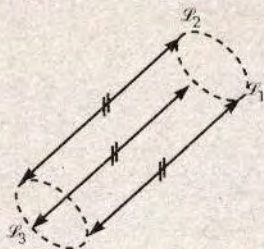
$$\overline{l_1} // \square P$$

$$\overline{l_2} \subset \square P$$

Pero:

$\overline{l_1}$ y $\overline{l_2}$ no son paralelas.

• (FALSO)

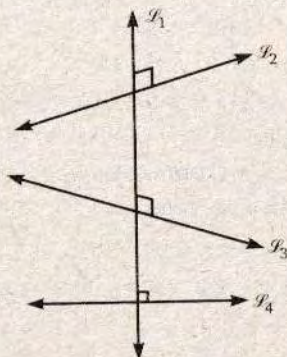


$$\overline{l_1} // \overline{l_2}$$

$$\overline{l_2} // \overline{l_3}$$

pero $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ y $\overline{l_3}$ no son coplanares.

• (FALSO)



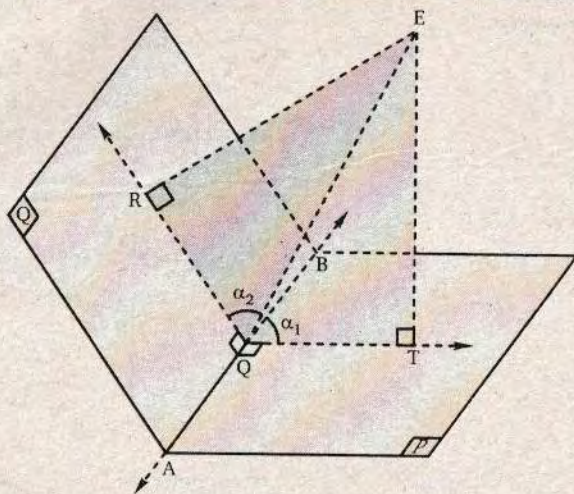
$$\overline{l_1} \perp \overline{l_2}; \overline{l_1} \perp \overline{l_3} \text{ y } \overline{l_1} \perp \overline{l_4}$$

Sin embargo:

$\overline{l_2}$ y $\overline{l_3}$ y $\overline{l_4}$ no son coplanares.

Rpta.: D

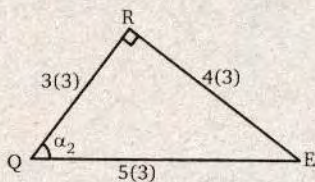
Resolución 58:



Piden: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

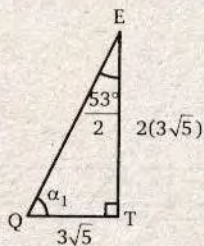
Se observa:

▢ RQE: (Notable)



$$\Rightarrow \alpha_2 = 53^\circ$$

▢ QPE: (Notable)



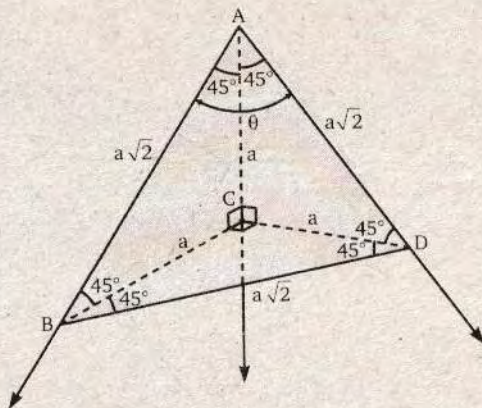
$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{127^\circ}{2}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{127^\circ}{2} + 53^\circ$$

$$\therefore \alpha = 116^\circ 30'$$

Rpta.: E

Resolución 59:



Piden :

$$m\angle BAD = \theta$$

Utilizando el $\triangle$ notable de 45° :

$$\rightarrow AC = CD = BC = a$$

$$\rightarrow AD = AB = a\sqrt{2}$$

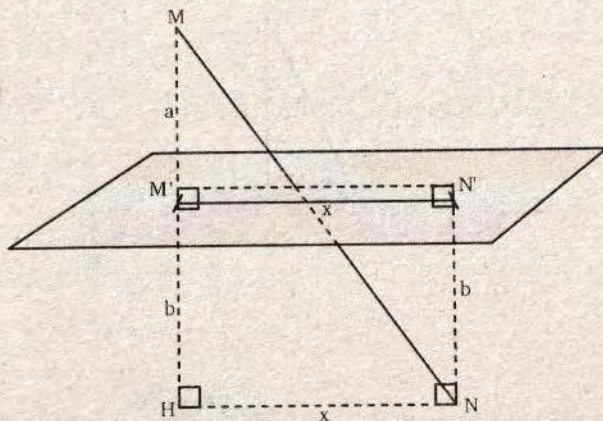
$$\rightarrow BD = a\sqrt{2}$$

$\triangle ABD$: Equilátero

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

Rpta.: C

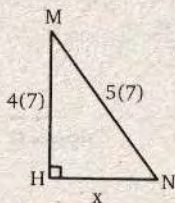
Resolución 60:



Piden: $M'N' = x$

Datos:
$$\begin{cases} a + b = 28 \\ MN = 35 \end{cases}$$

Se observa: $\angle MNH$ (Notable de 37° y 53°):

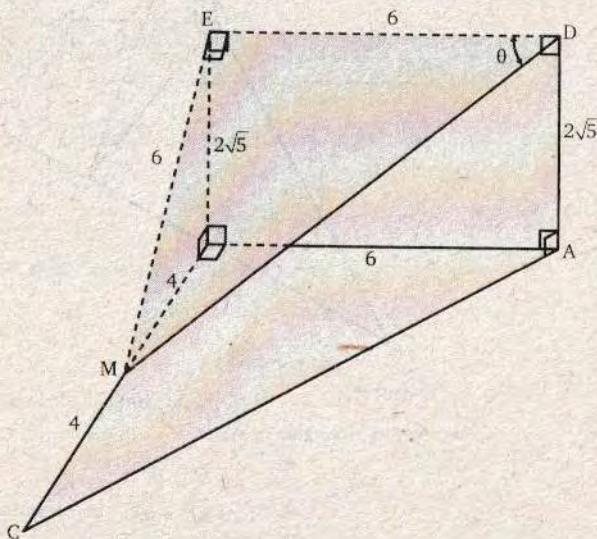


$$\Rightarrow x = 3(7)$$

$$\therefore x = 21 \text{ cm}$$

Rpta.: E

Resolución 61:



Trazamos $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, tal que:

$$DE = AB = 6$$

$\Rightarrow$ La medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{DM}$ será:

$$m\angle EDM = \theta$$

Se observa que:

$$BE = AD = 2\sqrt{5} \wedge \overline{BE} \perp \overline{BA} \rightarrow \overline{BE} \perp \overline{BC}$$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 08

 $\triangle MBE$ (Teorema de Pitágoras):

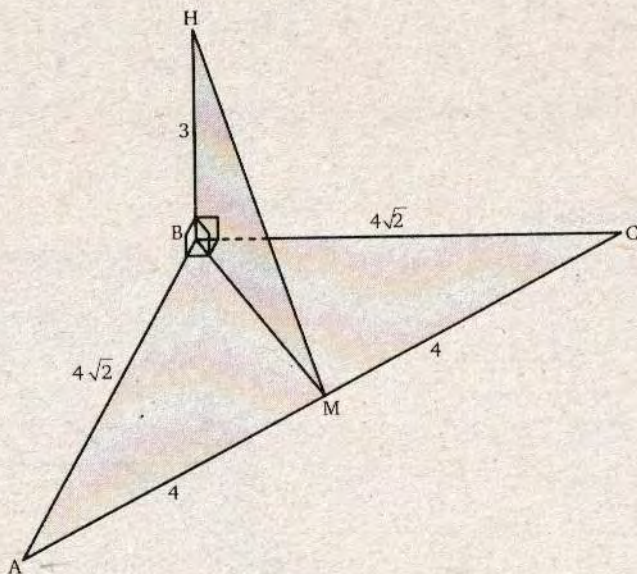
$$(ME)^2 = (4)^2 + (2\sqrt{5})^2 \rightarrow ME = 6$$

Por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{MB} \perp \overline{BE} \wedge \overline{BE} \perp \overline{ED} \rightarrow \overline{ME} \perp \overline{ED}$$

 $\triangle MED$ (Catetos congruentes) $\rightarrow$ es notable de 45° .

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

Rpta.: C**Resolución 62:**

Piden: HM

 $\triangle ABC$: (Notable de 45°):

$$AC = 8$$

$$\Rightarrow AM = MC = 4 \Rightarrow BM = 4$$

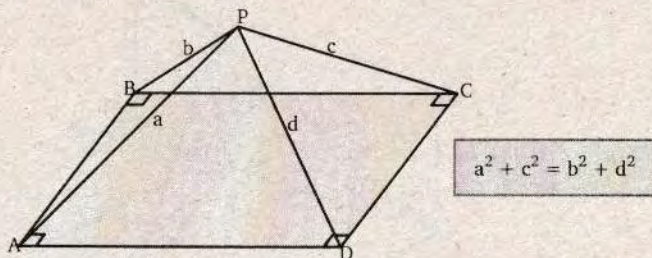
$$\overline{HB} \perp \triangle BAC \Rightarrow \overline{HB} \perp \overline{BM}$$

Se observa: $\triangle HBM$ (Notable de 37° y 53°)

$$\therefore MN = 5$$

Rpta.: E

Resolución 63: TEOREMA DE MARLEN EN EL ESPACIO.



DEMOSTRACIÓN

Sea P' la proyección ortogonal de P sobre el plano del $\square ABCD$

$APP'(\perp)$

$$a^2 = h^2 + (AP')^2 \rightarrow AP' = \sqrt{a^2 - h^2}$$

De manera análoga: $BP' = \sqrt{b^2 - h^2}$

$$CP' = \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$DP' = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Teorema de Marlen ($\square ABCD$):

$$\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{d^2 - h^2}$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

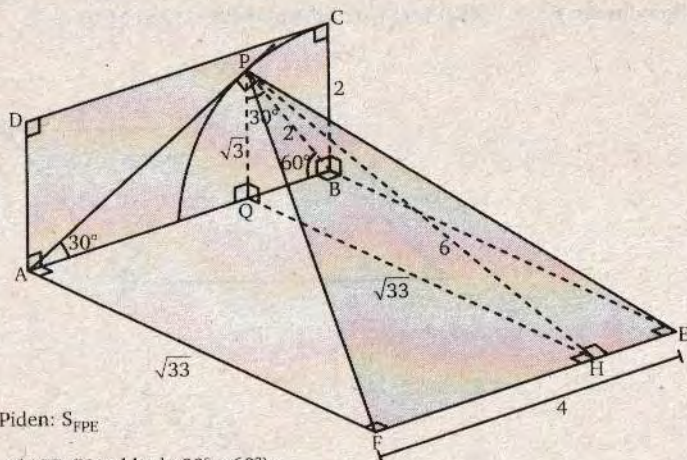
Luego en el problema: $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$; $d = x$

$$\Rightarrow 3^2 + 5^2 = 4^2 + x^2$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

Rpta.: C

Resolución 64:



Piden: S_{FPE}

$\triangle APB$ (Notable de 30° y 60°);

pues $AB = 4 \wedge BP = 2$.

$\triangle PBQ$ (Notable de 30° y 60°): $PQ = \sqrt{3}$

Teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{PQ} \perp \overline{QH} \wedge \overline{QH} \perp \overline{FE} \rightarrow \overline{PH} \perp \overline{FE}$$

$\triangle PHQ$ (Teorema de Pitágoras):

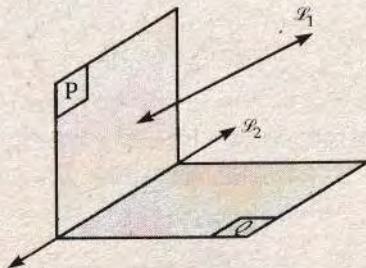
$$(PH)^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{33}^2 \rightarrow PH = 6$$

$$\Rightarrow S_{FPE} = \frac{4 \times 6}{2}$$

$$\therefore S_{FPE} = 12 \text{ m}^2$$

Rpta.: C

Resolución 65: 1) (FALSO)



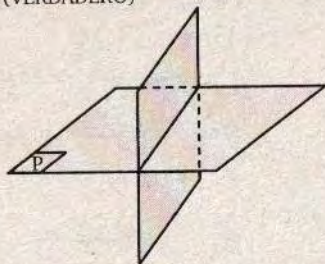
$$\overline{l_1} \parallel \square P$$

$$\overline{l_2} \parallel \square Q$$

$$\square P \text{ y } \square Q$$

no son paralelas.

II) (VERDADERO)



$$\overline{l_1} \text{ y } \overline{l_2} \subset Q$$

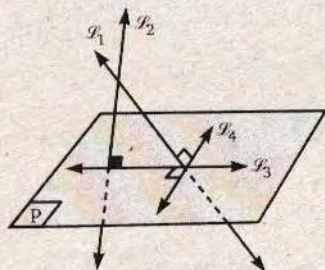
$$\overline{l_1} // \overline{l_2}$$

$$\overline{l_1} \perp \square P$$

Del gráfico

$\square Q$ y $\square P$ son perpendiculares

III) (FALSO)



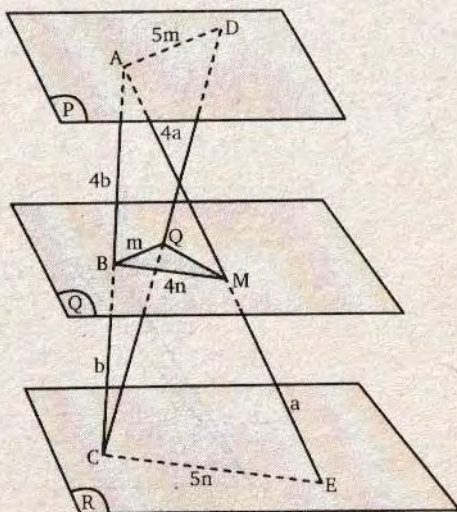
$\overline{l_1}$ no es perpendicular al $\square P$

$$\overline{l_2} \perp \square P \wedge \overline{l_3} \subset \square P$$

$\exists \overline{l_4} \perp \overline{l_1}$ Teorema de las tres perpendiculares

Rpta.: D

Resolución 66:



Piden :

$$(2p_{\triangle BQM})_{\text{máx. entero}} = (2p)_{\text{máx.}}$$

Datos:

$$\begin{cases} AD + 4(CE) = 20 \\ AM = 4ME \end{cases}$$

$$\rightarrow 5m + 4(5n) = 20 \Rightarrow m + 4n = 4 \dots\dots (I)$$

$$\overline{BM} \parallel \overline{CE} \triangle CAE \sim \triangle BAM$$

$$\frac{5n}{BM} = \frac{5}{4m} \rightarrow BM = 4n$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BQ} \triangle DCA \sim \triangle QCB$$

$$\frac{5}{BQ} = \frac{5m}{BQ} \rightarrow BQ = m$$

 $\triangle MBQ$: (Teorema de existencia):

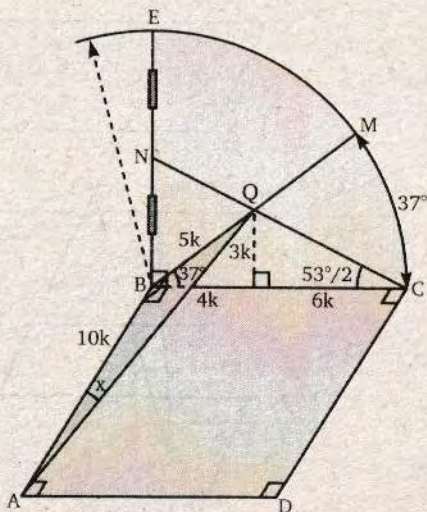
$$\ell < m + 4n$$

$$\rightarrow m + 4n + \ell < 2(m + 4n)$$

$$2p < 2(4)$$

$$2p < 8$$

$$\therefore (2p)_{\text{máx.}} = 7$$

Rpta.: C**Resolución 67:**

Piden:

x : ángulo entre $\overline{DC}$ y $\overline{AQ}$

$$\overline{AB} // \overline{DC}$$

→ En la medida buscada será:

$$m\angle BAQ = x$$

$$\begin{cases} \angle BQH \text{ (Notable de } 37^\circ \text{ y } 53^\circ) \\ \angle CQH \text{ (Notable de } \frac{53^\circ}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow QH = 3k \Rightarrow \begin{cases} BH = 4k \\ HC = 6k \end{cases}$$

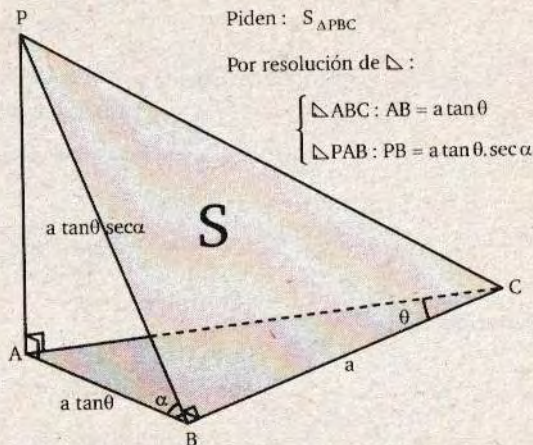
$$\Rightarrow AB = BC = 10k$$

$\angle ABQ$ (Notable de catetos en razón de 1 a 2).

$$\therefore x = \frac{53^\circ}{2}$$

Rpta.: C

Resolución 68:



Piden: $S_{\triangle PBC}$

Por resolución de $\triangle$:

$$\begin{cases} \triangle ABC: AB = a \tan \theta \\ \triangle PAB: PB = a \tan \theta \sec \alpha \end{cases}$$

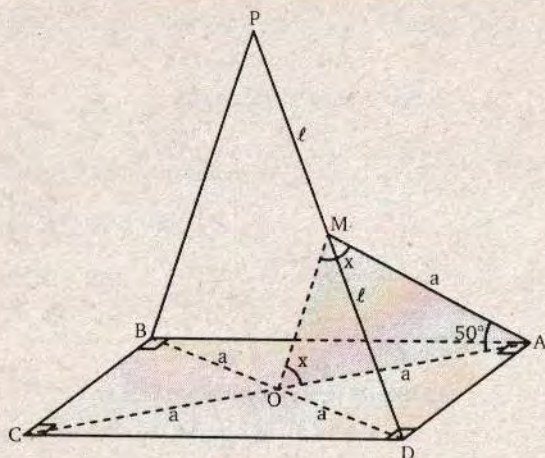
Por teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{PB} \perp \overline{BC}$$

$$\rightarrow S = \frac{a \times a \tan \theta \sec \alpha}{2}$$

$$\therefore S = \frac{a^2}{2} \tan \theta \sec \alpha$$

Rpta.: B

Resolución 69:

Piden : $x = m\angle (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{PB})$

Δ PDB: OM es base media.

$$\rightarrow \overline{OM} \parallel \overline{BP}$$

$$\rightarrow x = m\angle OMA$$

Del dato :

$$AC = 2(AM) = 2a$$

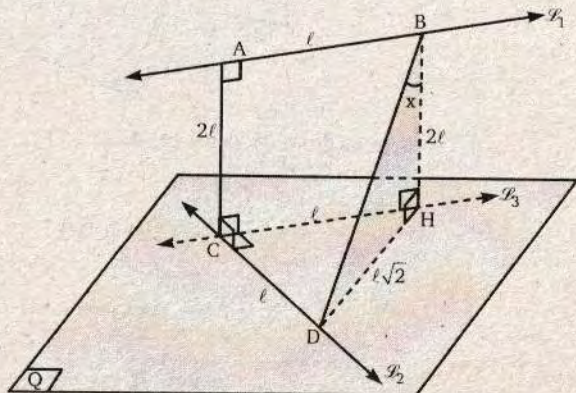
ΔAMO : Isósceles

$$\rightarrow 2x + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 65^\circ$$

Rpta.: B

Resolución 70:



Piden: $m\angle(\overline{BD}; \overline{AC}) = x$

Dato: $AC = 2(AB) = 2(CD) = 2\ell$

$\overline{\mathcal{T}}_3$ es la proyección ortogonal de $\overline{\mathcal{T}}_1$ sobre $\angle Q$ como $\overline{\mathcal{T}}_1$ y $\overline{\mathcal{T}}_2$ son ortogonales

$$\rightarrow \overline{\mathcal{T}}_3 \perp \overline{\mathcal{T}}_2$$

$$\rightarrow \angle HCD \text{ (Notable de } 45^\circ) \rightarrow DH =$$

Del gráfico:

$$BH = AC = 2\ell$$

$$AB = CD = \ell$$

Además:

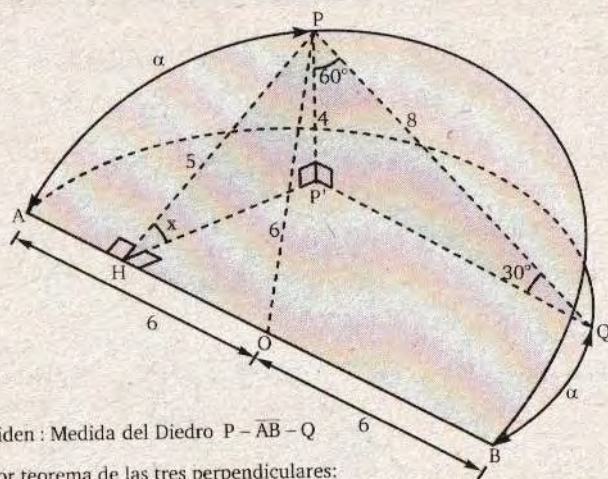
$$\overline{BH} \parallel \overline{AC} \rightarrow x = m\angle HBD$$

$$\triangle DHB: \tan x = \frac{\ell\sqrt{2}}{2\ell}$$

$$\therefore x = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 71:



Piden: Medida del Diedro $P-AB-Q$

Por teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{PP'} \perp \overline{P'H} \wedge \overline{P'H} \perp \overline{AB} \rightarrow \overline{PH} \perp \overline{AB}$$

$$\text{Dato: } \text{sen} x = \frac{5}{6} \rightarrow PH = 5$$

$\angle HPP'$ (Notable de 37° y 53°)

$$\therefore x = 53^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 72:

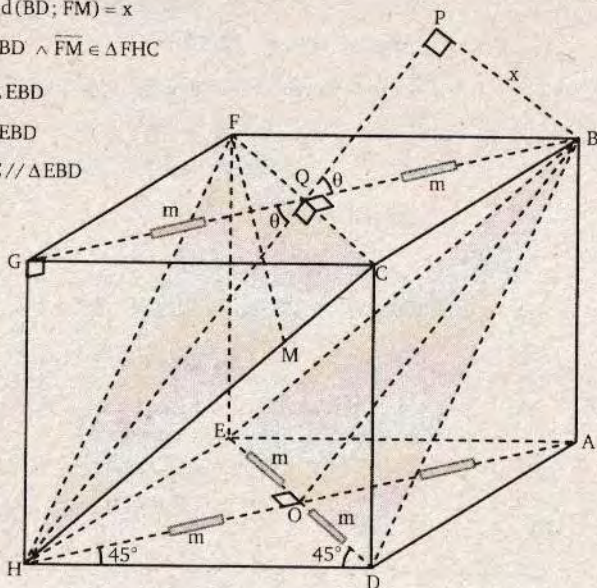
Piden: $d(\overline{BD}; \overline{FM}) = x$

$\overline{BD} \in \triangle EBD \wedge \overline{FM} \in \triangle FHC$

$\begin{cases} \overline{HQ} \parallel \triangle EBD \\ \overline{FC} \parallel \triangle EBD \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle HFC \parallel \triangle EBD$

$\Rightarrow \triangle HFC \parallel \triangle EBD$



$$\Rightarrow x = d(\triangle HFC; \triangle EBD)$$

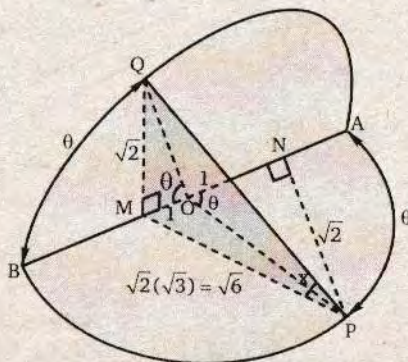
$$BPQ \sim HGQ: \quad \frac{x}{m\sqrt{2}} = \frac{m}{m\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow x = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: D

Resolución 73:



Piden: $m\angle(\overline{PQ}; \text{plano APB})$:

"M" es proyección de "Q"

sobre $\triangle APB$. $\triangle QMO \cong \triangle PNO$

$\rightarrow OM = ON = 1$

(Sin pérdida de generalidad).

$\triangle MNP$: Teorema de Pitágoras.

$$(MP)^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2 \rightarrow MP = \sqrt{6}$$

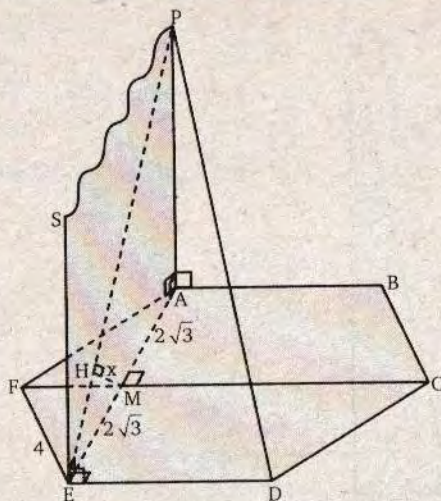
$\triangle QMP$: (Notable de 30° y 60°)

$$\therefore x = 30^\circ$$

Rpta.: C

RECTAS Y PLANOS - DIEDROS Y TRIEDROS

Resolución 74:



Sabemos:

 $\triangle AFE$: isósceles. $AE = 4\sqrt{3}$ $\rightarrow \triangle PAE$: Notable (30° y 60°) $\triangle MHE$: Notable (30° y 60°)

$$\therefore l = \sqrt{3}$$

Rpta.: D

$$\text{Piden: } d(\overline{FC}; \overline{PD}) = x$$

Trazamos $\overline{SE} \perp \square ABCDEF$

$$\rightarrow \square APSE \perp \square ABCDEF$$

$$\text{Como } \overline{FC} \perp \overline{AE}$$

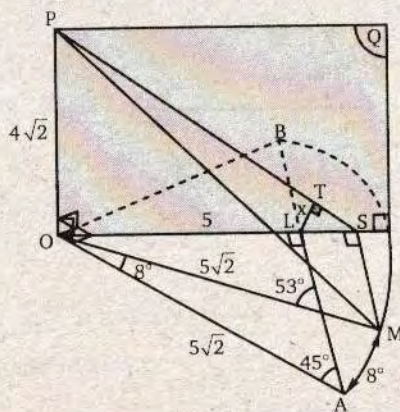
$$\rightarrow \overline{FC} \perp \square APSE$$

Se observa:

M: Proyección ortogonal de $\overline{FC}$ sobre $\square APSE$ PE: Proyección ortogonal de $\overline{PD}$ sobre $\square APSE$

$$\rightarrow MH = d(\overline{FC}; \overline{PD}) = l$$

Resolución 75:



$$\text{Piden: } 2x$$

"L" es proyección de AB sobre $\square Q$ PS es proyección de PM sobre $\square Q$

$$\triangle OSM$$
: Not. 37° y 53°

$$\rightarrow OS = 4\sqrt{2}$$

$$LS = 4\sqrt{2} - 5$$

$$\text{En } \triangle POS$$
: Not. 45°

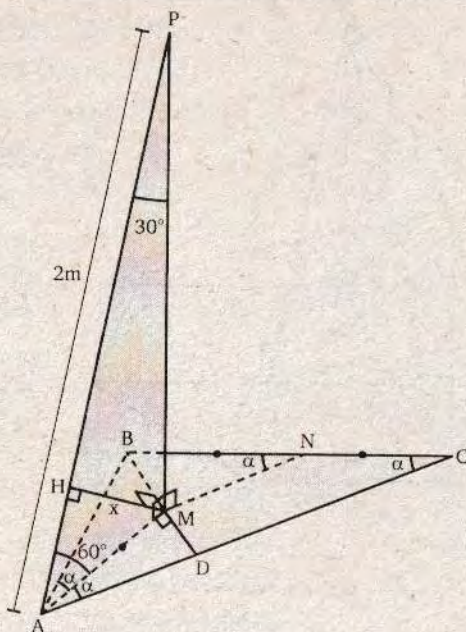
$$\rightarrow \triangle LTS$$
: Not. 45°

$$x = \frac{4\sqrt{2} - 5}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore 2x = 8 - 5\sqrt{2}$$

Rpta.: C

Resolución 76:



$$x = d(\overline{BD}; \overline{AP})$$

$$\overline{BD} \perp (\text{Plano APM})$$

Trazamos $\overline{MN}$

(Base media del $\triangle BDC$)

→ $\triangle AML$ es trapecio isósceles.

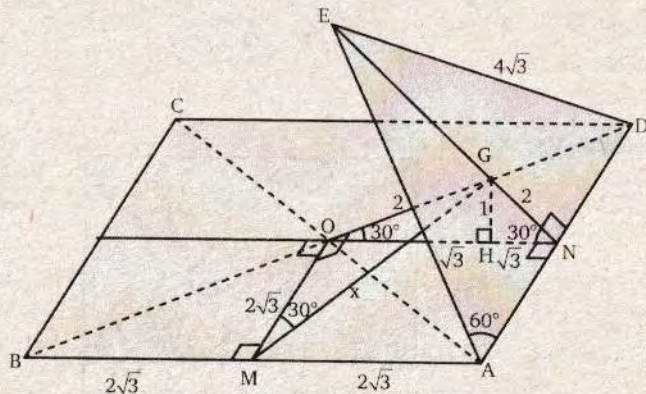
$$LC = AM = m$$

→ $\triangle AMP$: (Notable de 30° y 60°)

$$\therefore x = 6$$

Rpta.: B

Resolución 77:



$$\text{Piden : } GM = x$$

$$EN = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}) = 6$$

$$\rightarrow GN = \frac{6}{3} = 2 \quad (G \text{ es Baricentro}).$$

$\triangle NGH$ (Notable de 30° y 60°):

$$NH = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow HO = \sqrt{3}$$

△ OGH (Notable de 30° y 60°):

$$OG = 2$$

Teorema de las tres perpendiculares:

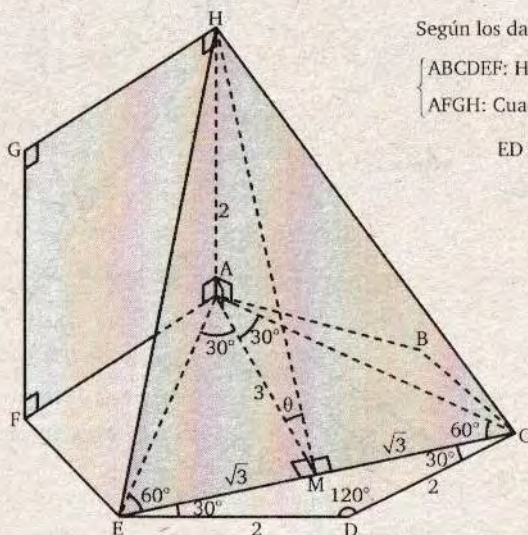
$$\overline{GH} \perp \overline{HO} \wedge \overline{HO} \perp \overline{OM} \rightarrow \overline{GO} \perp \overline{OM}$$

△ MGO (Notable de 30° y 60°)

$$\therefore x = 4$$

Rpta.: C

Resolución 78: Piden : $m(H - EC - A) = \theta$



Según los datos:

{ ABCDEF: Hexágono regular.
AFGH: Cuadrado.

$$ED = 2$$

y

△ EDC (de 30° y 120°): $EC = 2\sqrt{3}$

△ EAC Equilátero.

△ EAM (Notable de 30° y 60°):

$$AM = \sqrt{3}(\sqrt{3}) = 3$$

△ HMA:

$$\tan \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

Rpta.: B

Resolución 79:Piden: $x = OO'$

$\left\{ \begin{array}{l} O \text{ es punto medio de } BD \\ O' \text{ es punto medio de } BD' \end{array} \right.$

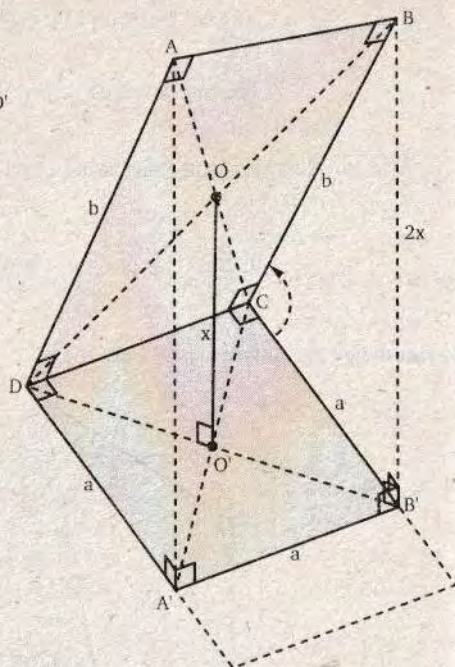
$\Rightarrow \overline{OO'}$ es base media
de $\triangle DBB'$

$\Rightarrow BB' = 2x$

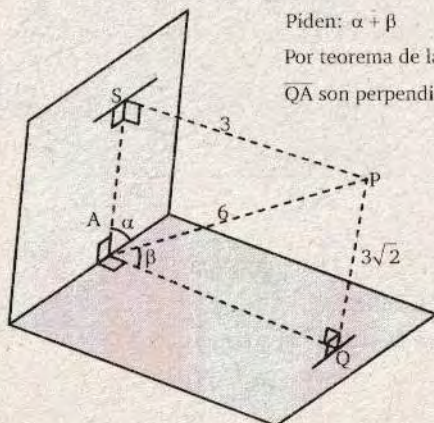
$\triangle CBB'$ (Teorema
de Pitágoras):

$$b^2 = a^2 + (2x)^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$$

Rpta.: D**Resolución 80:**Piden: $\alpha + \beta$

Por teorema de las tres perpendiculares $\overline{SA}$ y $\overline{QA}$ son perpendiculares a la arista del diedro



$\triangle PSA$: (Notable de 30° y 60°) $\rightarrow \alpha = 30^\circ$

$\triangle PQA$: (Notable de 45°) $\rightarrow \beta = 45^\circ$

$$\therefore \alpha + \beta = 75^\circ$$

Rpta.: C

TEOREMA

En todo triángulo isósceles cuyas caras congruentes tienen medidas menores que 90° , se cumple que la proyección ortogonal de la arista común a dichas caras sobre la tercera cara, es bisectriz a esta última.

En virtud del teorema : $\overline{OQ}$ es bisectriz de $\angle BOC$.

$\triangle OLT$ (Notable de 45°):

$$\begin{cases} OT = TL = a \\ OL = a\sqrt{2} \end{cases}$$

$\triangle OMT$ (Notable de 30° y 60°):

$$OM = 2a$$

$\rightarrow \triangle OML$ es notable de 45°

$\rightarrow m\angle LMQ = 45^\circ \wedge m\angle PQM = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

$\triangle PQR$ (Notable de 30° y 60°):

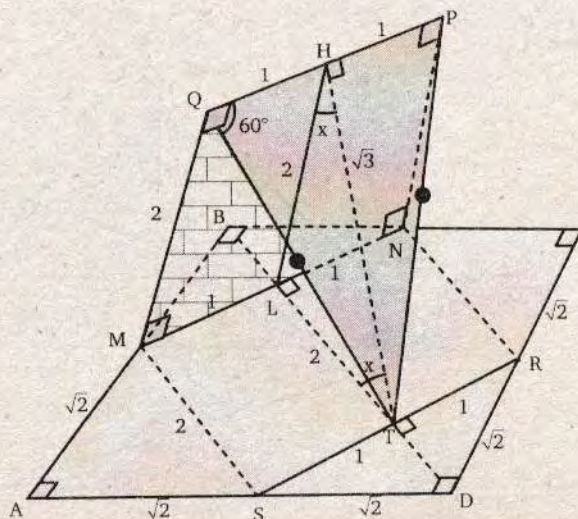
$$\begin{cases} PQ = 4 \\ PR = 2 \end{cases}$$

$\triangle PMR$ (Notable de 45°):

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: B

Resolución 83:



Se observa que: $\overline{SR} \parallel \overline{QP} \rightarrow \overline{TH} \perp \overline{QP} \wedge \overline{TH} \perp \overline{SR}$

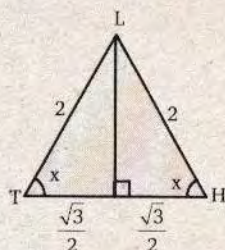
Luego la medida del diedro buscado será:

$$x = m \angle HTL$$

$\triangle TLH$:

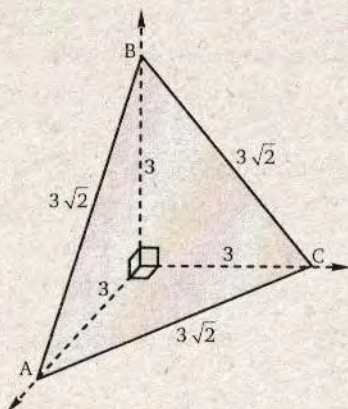
$$\rightarrow \cos x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{2}}$$

$$\therefore x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$



Rpta.: D

Resolución 84:



Piden la distancia de A al ortocentro del $\triangle ABC$.

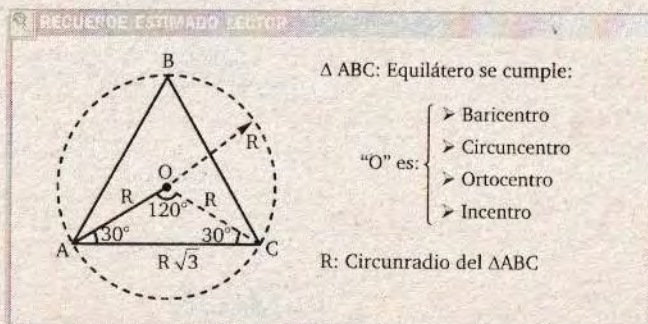
$\triangle ABC$: Equilátero de lado

Entonces en el problema estamos buscando la longitud del circunradio (R) del $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow R\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore R = \sqrt{6}$$

Rpta.: E



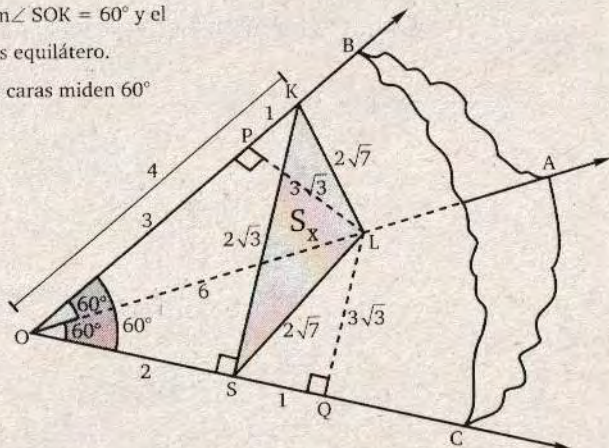
Resolución 85:

Piden : $S_{LKS} = S_x$

Datos : $m\angle SOK = 60^\circ$ y el

triedro es equilátero.

→ Las 3 caras miden 60°



como $OK = 2(OS) = 4$

→ KOS es $\triangle$ (recto en S) y notable de 30° y 60° :

$$\rightarrow KS = 2\sqrt{3}$$

Trazamos $\overline{LP} \perp \overline{OB} \wedge \overline{LQ} \perp \overline{OC}$

→ $\triangle LPO$ (Notable de 30° y 60°):

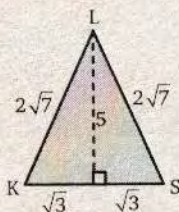
$$OP = 3 \wedge PL = 3\sqrt{3} \rightarrow PR = 1$$

$\triangle LPK$ (Teorema de Pitágoras):

$$(LK)^2 = (3\sqrt{3})^2 + 1^2 \rightarrow LK = 2\sqrt{7}$$

De manera análoga: $LS = 2\sqrt{7}$

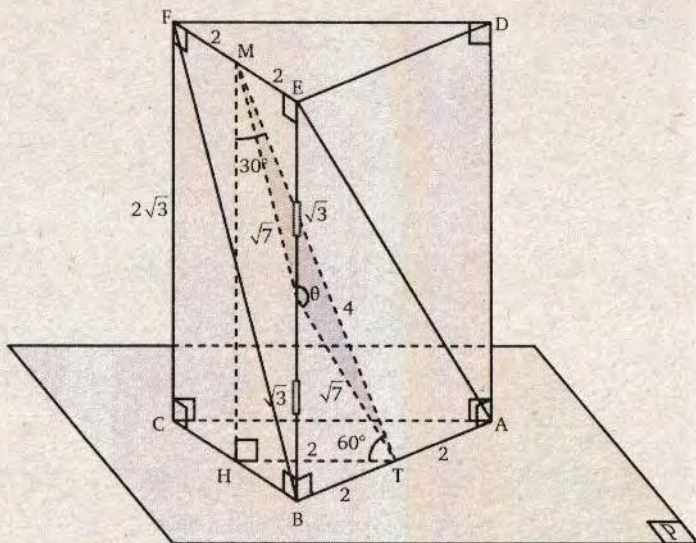
Luego:



$$\rightarrow S_x = \frac{(2\sqrt{3})(5)}{2}$$

$$\therefore S_x = 5\sqrt{3} \text{ u}^2$$

Rpta.: C

Resolución 87:

Piden : $m\angle(\overline{AE} - \overline{BF})$

Dato: La región equilátera DEF y su proyección ABC son equivalentes, entonces se concluye que dichas regiones son paralelas.

△ TMH (Notable de 30° y 60°):

Sea TH = 2 $\rightarrow$ HM = $2\sqrt{3}$ $\wedge$ MT = 4

N: Punto medio de EB.

→ Por el teorema de la base media:

$$\overline{MN} \parallel \overline{FB} \wedge \overline{TN} \parallel \overline{AB}$$

→ La medida buscada será:

$$m\angle MNT = \theta$$

Δ MNT (Teorema de cosenos):

$$4^2 = \sqrt{7}^2 + \sqrt{7}^2 - 2(\sqrt{7})(\sqrt{7})\cos\theta$$

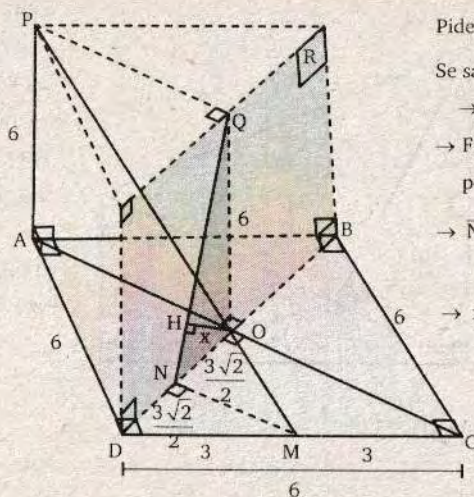
$$\rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{7}$$

$$\rightarrow \sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \theta = \arcsin \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Rpta.: A

Resolución 90:



Piden : $d(\overline{PM}; \overline{AC}) = x$

Se sabe que:

$$\rightarrow \overline{DB} \perp \overline{AC}$$

$\rightarrow$ Fijamos el plano R,
perpendicular a $\square ABCD$

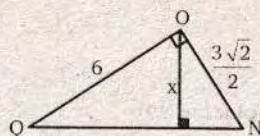
$\rightarrow \overline{NQ}$: Proyección ortogonal
de $\overline{PM}$ sobre $\square R$.

$$\rightarrow x = OH \quad (\overline{OH} \perp \overline{NQ})$$

$\square NOQ$: Relación métrica.

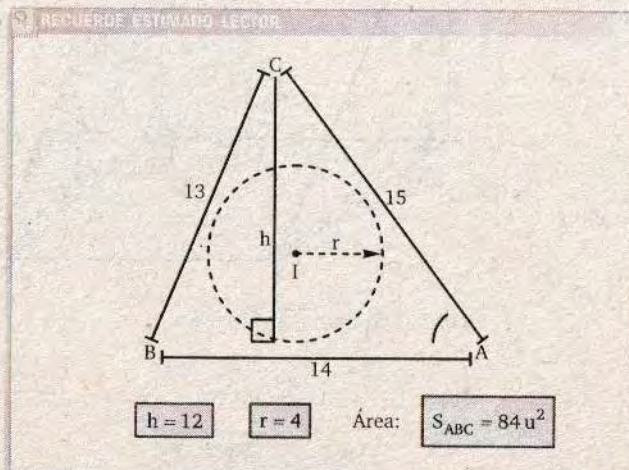
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore x = 2$$



Rpta.: B

Resolución 91:



Piden : $m\angle SOT = x$

$\angle SOT$ es perpendicular al plano del $\square ABCD$

T es el centro del $\square ABCD$.

Sin pérdida de generalidad, sea:

$$OT = 1 \rightarrow OQ = QP = \sqrt{2}$$

ΔAMB (G es baricentro):

$$GH = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$\overline{TS}$ es mediana del trapecio HGPQ ($\overline{HG} \parallel \overline{QP}$):

$$TS = \frac{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 3)}{6}$$

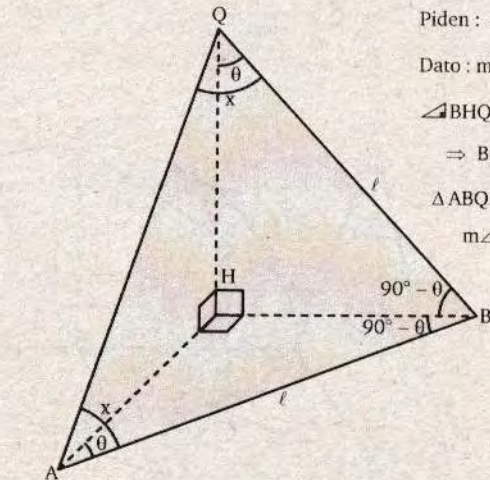
$\angle OJT$:

$$\tan x = \frac{TS}{1} = TS = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{6}$$

$$\therefore x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}}\right)$$

Rpta.: B

Resolución 93:



Piden : $m\angle AQB = x$

Dato : $m\angle AQB = m\angle QAB = 120^\circ$

$\angle BHQ \cong \angle BHA$ (A - L - A)

$$\Rightarrow BQ = BA = \ell$$

ΔABQ (Isósceles):

$$m\angle QAB = m\angle AQB = x$$

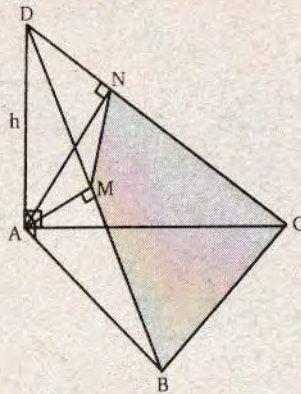
Del dato:

$$x + x = 120^\circ$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 94:



Relación métrica en el triángulo rectángulo.

$$\triangle DAB: h^2 = (DM) \cdot (DB) \dots\dots(1)$$

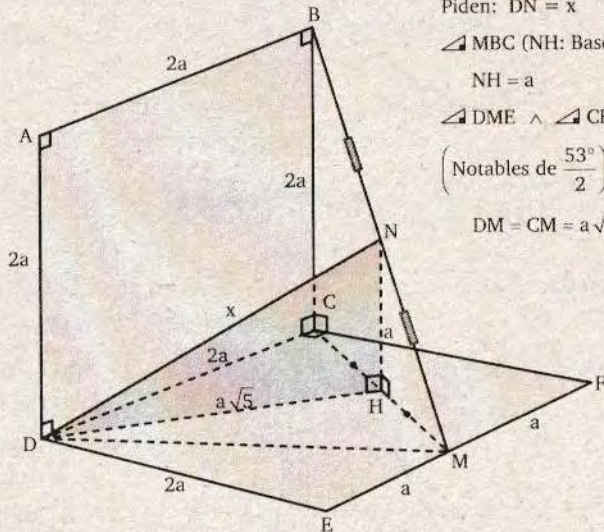
$$\triangle DAC: h^2 = (DN) \cdot (DC) \dots\dots(2)$$

$$(1) = (2): (DM) \cdot (DB) = (DN) \cdot (DC)$$

$\therefore$ BMNC : $\triangle$ inscriptible

Rpta.: B

Resolución 95:



Piden: $DN = x$

$\triangle MBC$ (NH: Base media):

$$NH = a$$

$\triangle DME \sim \triangle CHF$

(Notables de $\frac{53^\circ}{2}$):

$$DM = CM = a\sqrt{5}$$

$$\triangle DNH \text{ (Teorema de Pitágoras): } x^2 = a^2 + (DH)^2 \rightarrow DH = \sqrt{x^2 - a^2}$$

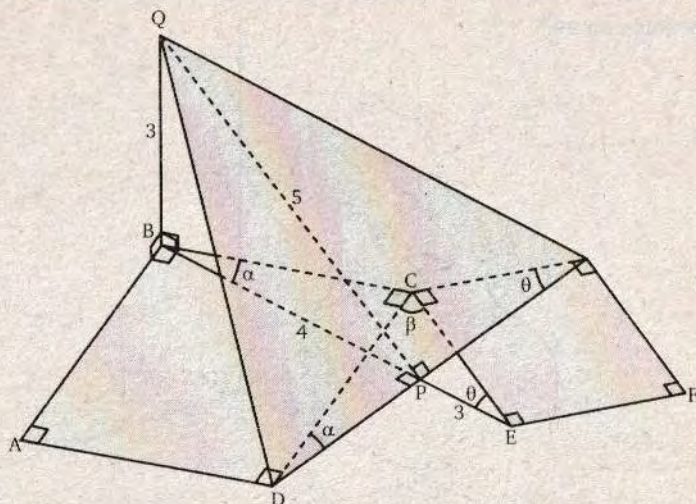
$\triangle CDM$ (Teorema de la mediana):

$$(2a)^2 + (a\sqrt{5})^2 = 2(\sqrt{x^2 - a^2})^2 + \frac{(a\sqrt{5})^2}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{17}}{2} a$$

Rpta.: C

Resolución 98:



Piden: S_{DQG}

$$\triangle BCE \cong \triangle DCG$$

$$\rightarrow BE = DG = 7$$

$$\sphericalangle BCDP: \quad \overline{BE} \perp \overline{DG} \text{ en } P$$

Teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{QB} \perp \overline{BP} \wedge \overline{BP} \perp \overline{DG} \rightarrow \overline{QP} \perp \overline{DG}$$

$\sphericalangle PQB$ (Notable de 37° y 53°):

$$PQ = 5$$

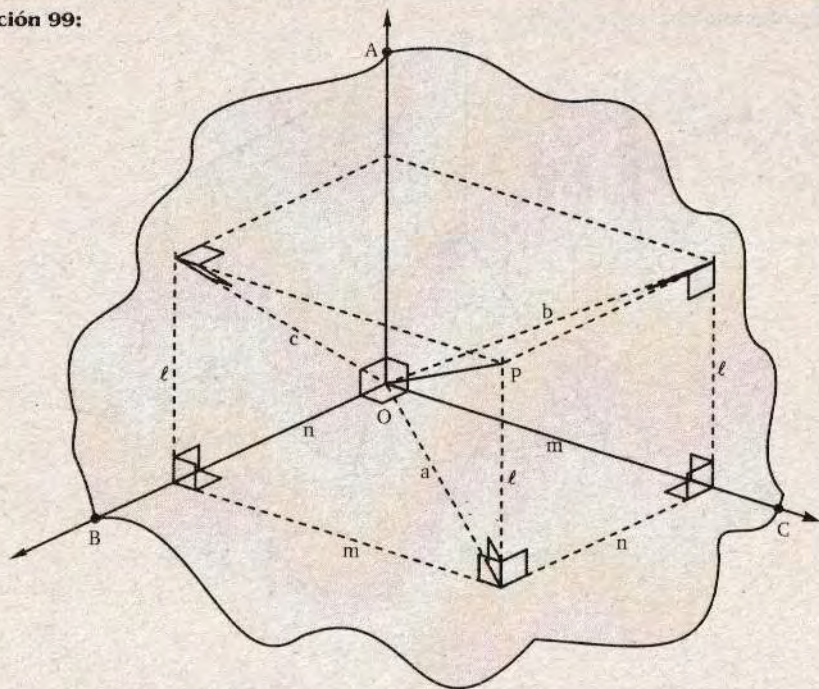
Luego:

$$S_{DQG} = \frac{7 \times 5}{2}$$

$$\therefore S_{DQG} = \frac{35}{2} u^2$$

Rpta.: B

Resolución 99:



Piden : $OP = x$

Dato : $a^2 + b^2 + c^2 = 50$ (I)

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{array}{l} x^2 = a^2 + l^2 \\ a^2 = m^2 + n^2 \end{array} \downarrow (+)$$

$$x^2 = m^2 + n^2 + l^2 \quad \text{.....(II)}$$

También:

$$\begin{array}{l} a^2 = m^2 + n^2 \\ b^2 = m^2 + l^2 \\ c^2 = n^2 + l^2 \end{array} \downarrow (+)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(m^2 + n^2 + l^2) \quad \text{.....(III)}$$

Reemplazando (I) y (II) en (III):

$$50 = 2x^2$$

$$\therefore x = 5u$$

Rpta.: C



PROBLEMAS PROPUESTOS

- Calcular el máximo número de planos que se pueden determinar con 12 puntos diferentes y no colineales.
A) 90 B) 220 C) 270
D) 360 E) 110
- Hallar el máximo número de planos que se pueden formar con 15 rectas y 8 puntos.
A) 271 B) 261 C) 281
D) 120 E) 150
- Se tiene un segmento $\overline{AB}$, la diferencia de las distancias de "A" y "B" a un plano exterior es 7 u. Si la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano mide 24 u, hallar AB.
A) 26 u B) 30 u C) 28 u
D) 25 u E) 32 u
- Se tiene una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, igual a 10 m. Por el punto "A" se levanta una perpendicular $\overline{AD}$ al plano de la circunferencia tal que $AD = 6$ m y en la circunferencia se traza la cuerda $\overline{BC} = 6$ m. Calcular el área de la región triangular DBC.
A) 28 m^2 B) 15 m^2 C) 30 m^2
D) 60 m^2 E) 35 m^2
- Con "n" rectas paralelas y 6 puntos en el espacio se han determinado como máximo 125 planos. Hallar "n".
A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14
- Indicar si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.
* Si dos rectas, son paralelas a un plano, entonces sus proyecciones sobre dicho plano también son paralelas.
* Si una recta es perpendicular a un plano entonces, toda recta perpendicular a ella es paralela al plano.
* Si dos rectas secantes son paralelas a un plano, entonces el plano que determinan también es paralelo al primer plano mencionado.
A) FFV B) FFF C) VVV
D) VFV E) FVV
- Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
* Si dos planos son secantes a una misma recta, entonces los planos son necesariamente paralelos entre sí.
* Dos rectas paralelas a un mismo plano pueden ser cruzadas entre sí.
* Tres rectas paralelas entre sí, necesariamente son coplanares.
A) VVF B) FFF C) FFV
D) FVF E) FVV
- Por el extremo B del diámetro $\overline{AB}$, de una circunferencia se levanta la perpendicular $\overline{BE}$ al plano que contiene a dicha circunferencia, en la cual se ubica el punto N, si: $AE = 29$ u y $AN = 20$ u. Hallar el área de la región triangular ANE.
A) 105 u^2 B) 110 u^2 C) 250 u^2
D) 210 u^2 E) 300 u^2

9. Indicar verdadero (V) o falso (F).

- * Si una recta es paralela a la intersección de dos planos secantes, entonces dicha recta es paralela a los planos mencionados.
- * Si la intersección de dos planos secantes es alabeada con una recta, entonces esta última es secante de dichos planos.
- * Si P es un punto exterior a dos rectas cruzadas, entonces por P sólo se puede trazar un plano paralelo a dichas rectas.

- A) FFF B) VVV C) VVF
D) FFV E) VFV

10. Un plano queda determinado unívocamente por:

1. Tres puntos no colineales.
2. El movimiento de una recta que se desplaza paralelamente así misma.
3. Dos rectas paralelas.
4. Una recta que se mueve pasando siempre por un punto fijo.

De estas afirmaciones, son ciertas:

- A) 1 y 2 B) 1 y 3 C) 2 y 3
D) 2 y 4 E) 3 y 4

11. Por el vértice A de un triángulo equilátero ABC de lado 6u se levanta AH perpendicular al triángulo, luego se une H con B y C. Hallar la distancia del punto A al plano HBC; si además el diedro H - BC - A mide 60° .

- A) 3u B) 4,5u C) 6u
D) $3\sqrt{2}u$ E) $3\sqrt{3}u$

12. El lado $\overline{AB}$ de un triángulo rectángulo isósceles ABC (recto en B) pertenece a un plano P. El cateto $\overline{BC}$ forma con dicho plano 45° . Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{AC}$ con dicho plano.

- A) 60° B) 45° C) 30°
D) 53° E) 37°

13. Sean los cuadrados ABCD y ABFE que forman el diedro $\overline{AB}$ que mide 60° . Hallar la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ ($AB = 12$ dm)

- A) 8 dm B) $4\sqrt{3}$ dm C) $6\sqrt{3}$ dm
D) 2 dm E) 5 dm

14. Dado el triángulo AOB recto en "O" en el cual $OA = OB = 4$ por "O" se levanta la perpendicular $OM = 2\sqrt{2}$ al plano de dicho triángulo. Hallar el diedro formado por los planos AOB y MAB.

- A) 69° B) 30° C) 45°
D) 15° E) 75°

15. Dado un plano "H", un segmento de recta $\overline{AB}$ de 8 cm. de longitud situado en el plano y un punto "P" distante 12 cm del mismo plano. Encontrar la distancia de $\overline{AB}$ al punto de intersección de la perpendicular trazada del punto "P" al plano.

Si: $AP = BP = 13$ cm.

- A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

16. Dado un rectángulo ABCD y un punto "P" exterior al plano del rectángulo.

$$\text{Si: } PA^2 + PC^2 = 39 \text{ y } PD = \sqrt{3}$$

Calcular PB.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 13

17. Un triángulo ABC se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección de la región triangular sobre el plano P tiene 20 cm^2 de área, encontrar en cm^2 el área de la región ABC.

- A) $20\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $24\sqrt{2}$
D) 24 E) 30

18. En una circunferencia de diámetro AB = 10 cm, se escoge un punto P sobre dicha circunferencia; si hacemos girar α° la circunferencia sobre su diámetro la nueva ubicación de P es P'. Hallar AP para que el perímetro del triángulo PMP' sea máximo, siendo M la proyección de P sobre AB.

- A) 5 cm B) 10 cm C) $5\sqrt{2}$ cm
D) $10\sqrt{2}$ cm E) $5\sqrt{3}$ cm

19. Dado un triedro S - ABC, si $\vec{SC}$ forma con la bisectriz de la cara opuesta un ángulo igual a la mitad de dicha cara, calcular el diedro C, si:
 $m(\text{diedro A}) + m(\text{diedro B}) = 120^\circ$.

- A) 90° B) 45° C) 135°
D) 60° E) 120°

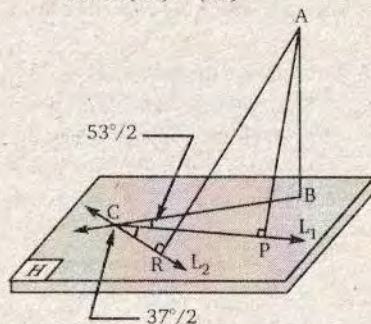
20. Dados dos planos no paralelos se toma un segmento $\overline{AD}$ perteneciente a uno de los planos. Si $\overline{BC}$ es la proyección de $\overline{AD}$ sobre el otro plano, hallar AD, sabiendo que:

$$\frac{BC}{6} = \frac{DC}{3} = \frac{AB}{2} \text{ y el área de la región cuadrangular ABCD es } 60 \text{ m}^2.$$

- A) 8 m B) 12 m C) $4\sqrt{5}$ m
D) $3\sqrt{10}$ m E) $2\sqrt{37}$ m

21. En la figura $\overline{AB}$ es perpendicular al plano H, $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ están ubicados en dicho plano y $CR = \sqrt{10}$

$$\text{Calcule: } (AR)^2 - (AP)^2.$$



- A) 6 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

22. Los rectángulos ABCD y ABEF están ubicados en planos perpendiculares, $AD = 24$ y $BE = 10$. Calcule la distancia entre los centros de dichos rectángulos.

- A) 9 B) 13 C) 15
D) 16 E) 12

23. En el plano Q se traza el cuadrante AOB, luego por O se traza $\overline{OP}$ perpendicular a dicho plano de modo que la $m\angle APB = 53^\circ$. Calcule la medida del diedro determinado por la región APB y el plano Q.

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 75° E) 15°

24. En un plano se ubican los puntos A y B, exterior al plano se ubica el punto P, de modo que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ forman ángulos que miden 30° y 45° con dicho plano respectivamente. Si: $AP = 6$, calcule BP.

A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{2}$
D) 4 E) $3\sqrt{2}$

25. En el plano Q se traza el triángulo rectángulo ABC recto en B. Luego por A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano Q de modo que: $AP = AB = BC$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) 30° B) 40° C) 50°
D) 60° E) 10°

26. Dado una región triangular ABC recto en B, $AB = 6$ y $BC = 8$; por el vértice A se traza la perpendicular $\overline{AP}$ al plano que lo contiene. $AP = 2\sqrt{5}$ Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{PM}$, siendo M punto medio de $\overline{BC}$.

A) 45° B) 30° C) 60°
D) 75° E) 90°

27. En el plano Q se traza el triángulo equilátero ABC, luego por A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano Q, de modo que $AP = AB$. Calcule la medida del ángulo que forman $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) 30° B) 40°
C) 45°
D) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

28. Los triángulos rectángulos ABC y ADC rectos en B y D respectivamente, están ubicados en planos perpendiculares, B y D distan de los planos que no los contienen 6 y 4 metros respectivamente. Calcule la suma de distancias del punto medio de $\overline{BD}$ hacia dichos planos.

A) 3 m B) 4 m C) 5 m
D) 6 m E) 7 m

29. Un cuadrante AOB ($AO = OB = 2u$) y un semicírculo cuyo diámetro es $\overline{OB}$ están ubicados en planos perpendiculares. Calcule el área de la región triangular AMB, siendo M punto medio del arco OB.

A) $2u^2$ B) $3u^2$ C) $4u^2$
D) $\sqrt{3}u^2$ E) $5u^2$

30. Dado un ángulo diedro $P - \overline{AB} - Q$ cuya medida es θ , en la cara P está ubicado la región triangular MNC cuya área es A y en la cara Q está ubicado la región triangular MND, tal que D es la proyección ortogonal de C. Calcule el área de la región triangular MND en función de A y θ .

A) $A \sin \theta$ B) $A \cos \theta$ C) $\frac{A}{2} \sin \theta$
D) $A \tan \theta$ E) $A \cot \theta$

31. Una semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AB}$ y un triángulo equilátero ABC están ubicados en planos cuyo diedro mide 60° . P es punto medio del arco AB , $AB = 4$. ¿Cuánto dista P del plano que contiene al triángulo equilátero ABC ?

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) 4

32. En un plano H están ubicados los puntos no colineales A , C y D ; por A se traza la perpendicular $\overline{AB}$ al plano H .

Si: $(AB)^2 + (CD)^2 = 36$, calcule la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 2,5 E) 4

33. En el plano Q se traza el cuadrado $ABCD$, luego se ubican los puntos medios M y N de $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ respectivamente, $\overline{CN} \cap \overline{BM} = \{L\}$. Por B se traza $\overline{BP}$ perpendicular a dicho plano, de modo que $4(NC) = 5(PB)$. Calcule la medida del diedro entre la región NCP y el plano Q .

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 15°

34. Un cuadrado $ABCD$ cuyo centro es O y el triángulo equilátero ALB se encuentran contenidos en planos perpendiculares. Si $AB = 8$, calcule OL .

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

35. Un cuadrado $ABCD$ cuyo centro es O y el triángulo equilátero AEB se encuentran contenidos en planos perpendiculares siendo M punto medio de $\overline{EB}$. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{OM}$ y el plano que contiene a dicho cuadrado.

A) $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$

C) 30°

D) 45° E) $\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

36. En el plano Q se traza la semicircunferencia cuyo diámetro $\overline{AB}$ es de longitud 8, en ella se traza la cuerda $\overline{MN}$ y por A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano Q . Si la distancia de B a $\overleftrightarrow{MN}$ es $\sqrt{3}$, $AP = 5$ y $m\widehat{MN} = 60^\circ$. Calcule el área de la región triangular NMP .

A) $\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $3\sqrt{13}$
D) $4\sqrt{13}$ E) $5\sqrt{13}$

37. Indique el valor de verdad de los siguientes enunciados:

- I. Si 2 rectas no tienen intersección, entonces son paralelas.
II. Dos rectas cruzadas pueden estar contenidas en planos paralelos.
III. La proyección ortogonal de un triángulo sobre un plano exterior a dicho triángulo es siempre un triángulo.

A) VFV B) FFV C) FVF
D) VVF E) VFF

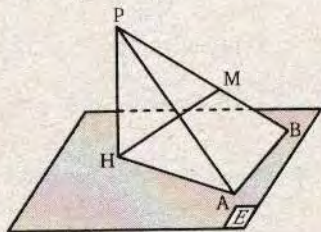
38. En el plano Q se ubican los puntos A, B, C y D de modo que ABCD es un rombo. Luego se ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Se traza $\overline{CP}$ perpendicular al plano Q, siendo $CP = AC$. Calcule la medida del diedro formado por el plano MNP y el plano Q.

A) 15° B) 45° C) 35°
D) 53° E) 60°

39. Se tiene un cuadrado ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Luego se traza $\overline{PB}$ perpendicular al plano de dicho cuadrado, tal que $BP = 3$, $AD = 2\sqrt{5}$; calcule $m\angle BPE$, siendo E la intersección de $\overline{CM}$ y $\overline{BN}$.

A) 37° B) 53° C) 60°
D) $\frac{127^\circ}{2}$ E) 74°

40. Del gráfico, $\overline{PH}$ es perpendicular al plano E, además, $AB = 6$, $PM = MB = 5$, $AP = 8$. Calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{HM}$.



A) 37° B) 53° C) 90°
D) $\frac{127^\circ}{2}$ E) $\frac{37^\circ}{2}$

41. Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ADE, tal que la proyección ortogonal de O es G (O: centro de ABCD y G: baricentro de ADE), y M es punto medio de $\overline{BC}$.

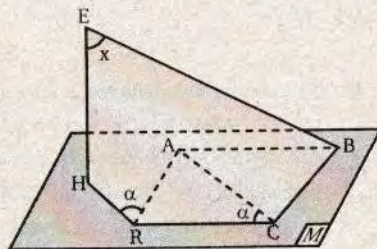
Calcule: $\frac{EM}{MG}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

42. Se tienen un pentágono regular ABCDE y se traza $\overline{AH}$ perpendicular al plano de dicho pentágono. Si $BH = BD$, calcule la medida del ángulo entre $\overrightarrow{BH}$ y $\overrightarrow{CD}$.

A) 36° B) 54° C) 60°
D) 90° E) 72°

43. Del gráfico, ABCR es un rectángulo, $\overline{EH}$ es perpendicular al plano M, $EH = HR = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, calcule x. ($\{A; B; C; R; H\} \subset \triangle M$)



A) 30° B) 60° C) 37°
D) $\frac{127^\circ}{2}$ E) $\frac{143^\circ}{2}$

44. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, de incentro I; además, se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano de A región ABC, si $\sqrt{2}(AC) = 5(BP)$, calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{IP}$ y el plano que contiene a la región ABC, además $m\angle ACB = 37^\circ$

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 53°

45. Indique el valor de verdad de los siguientes enunciados.

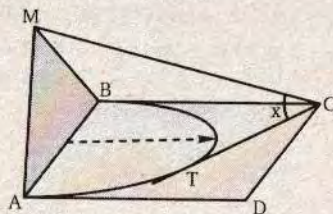
- I. Se tienen 2 planos perpendiculares, entonces cualquier recta, contenida en uno de ellos es perpendicular al otro plano.
II. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces dicha recta será paralela a un plano paralelo al plano inicial.
III. La intersección de tres planos perpendiculares, dos a dos, es una recta.

A) FFV B) FFF C) FVV
D) FVF E) VVV

46. Se tiene un cuadrado ABCD (O: centro de ABCD) y un triángulo equilátero AMO ubicados en planos perpendiculares. Calcule $m\angle GDO$, siendo G el baricentro de la región AMO.

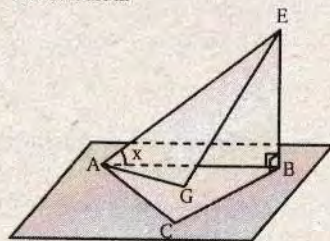
A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 45°

47. Del gráfico, la región cuadrada ABCD y la región equilátera AMB están en planos perpendiculares, calcule x. (T es punto de tangencia).



A) $\frac{37^\circ}{2}$ B) $\frac{53^\circ}{2}$ C) 30°
D) 45° E) 53°

48. Del gráfico, G es baricentro de la región equilátera ABC; además, la medida del diedro entre ABC y AEG es 45° . Calcule x.

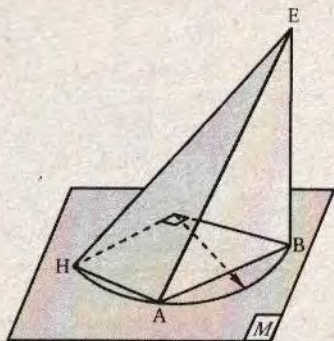


A) 15° B) 30° C) $\frac{37^\circ}{2}$
D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) 37°

49. Calcule la medida del diedro determinado por las regiones equiláteras ABC y ACD si $2(BD) = 3(AB)$.

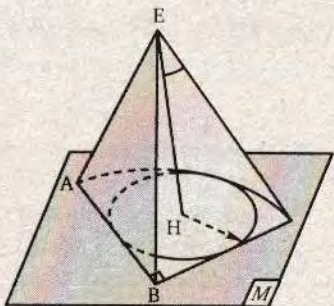
A) 37° B) 53° C) 74°
D) 106° E) 120°

50. Del gráfico, $\overline{EB}$ es perpendicular al $\square M$; además, $AB = \sqrt{2}BE$. Calcule la medida del diedro entre AEH y $\square M$.



- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 53°

51. Del gráfico, la circunferencia mostrada está inscrita en el cuadrante; además, $\overline{EH}$ es perpendicular a dicha región cuadrantal. Calcule la medida del diedro entre la región cuadrantal y $\triangle ABE$.



- A) 30° B) 37° C) 45°
D) $\frac{53^\circ}{2}$ E) 60°

52. Se tiene una circunferencia de centro O, y en ella se ubican A y B. Luego se traza el cuadrado ABCD perpendicular al plano de dicha circunferencia. Si la medida del ángulo que forma $\overline{OM}$ y el plano de la circunferencia es 37° , calcule $m\widehat{AB}$ (M es el centro del cuadrado ABCD).

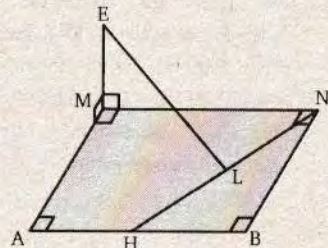
- A) 60° B) 37° C) 53°
D) 74° E) 127°

53. Indique el valor de verdad de los enunciados.

- I. Si una recta es paralela a un plano, entonces es paralela a infinitas rectas contenidas en dicho plano.
II. Si dos rectas forman ángulos de igual medida a un plano, entonces dichas rectas son paralelas entre sí.
III. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces cualquier recta que pase por su pie será perpendicular a dicha recta.

- A) VFF B) VVV C) FFF
D) VFV E) FFV

54. Del gráfico, $EM = 1$, $AH = HB = NL = LH = 4$. Calcule EL.

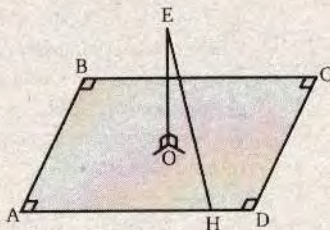


- A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 5
D) 6 E) 7

55. Por el vértice C de un triángulo equilátero ABC, se traza $\overline{CP}$ perpendicular al $\square R$, que contiene al triángulo; además, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Si la medida del ángulo entre $\overline{PM}$ y $\square R$ es $\frac{37^\circ}{2}$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{NP}$ y $\square R$.

- A) 30° B) 37° C) $\frac{37^\circ}{2}$
D) 45° E) 53°

56. Si O es el centro del cuadrado ABCD, además, $AB = EH$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{EH}$

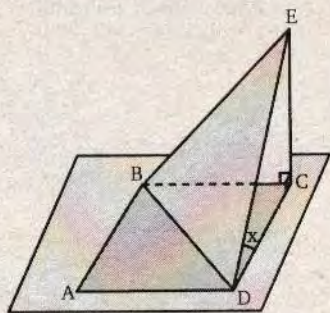


- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

57. Se tiene un rectángulo ABCD; además, por B se traza $\overline{EB}$ perpendicular al plano de dicho rectángulo. Si la medida de los ángulos entre $\overline{AE}$ y $\overline{EC}$ con ABCD son 45° y 30° , calcule la medida del ángulo entre $\overline{DE}$ y el plano de ABCD.

- A) 16° B) $\frac{53^\circ}{2}$ C) 30°
D) 37° E) 53°

58. Del gráfico, las regiones ABCD y BED son regulares. Calcule x.



- A) 30° B) $\frac{127^\circ}{2}$ C) $\frac{37^\circ}{2}$
D) 45° E) $\frac{53^\circ}{2}$

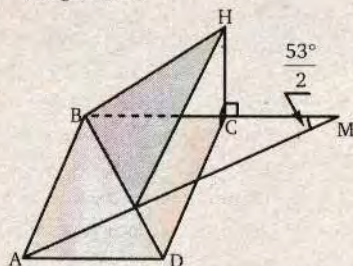
59. Se tiene un cuadrado ABCD de centro O; luego se traza $\overline{OE}$ perpendicular al plano de dicho cuadrado. Si M es punto medio de $\overline{OE}$, y $BO = OE$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{AM}$ y $\overline{ED}$

- A) 90° B) 60° C) 45°
D) $\frac{127^\circ}{2}$ E) $\frac{143^\circ}{2}$

60. Un rectángulo ABCD y un semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ se hallan en planos perpendiculares. En $\overline{AB}$ se ubica P tal que $m\widehat{AP} = 120^\circ$, y $m\angle BAC = 37^\circ$. Calcule la medida del diedro entre las regiones ABCD y CDP.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

61. Del gráfico, ABCD es un cuadrado, $AB = 3\sqrt{2}$, $EC = 3$. Calcule el área de la región BEH.

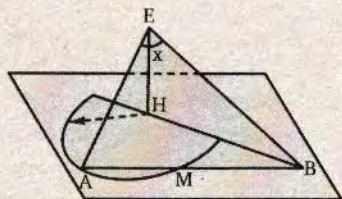


- A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$
D) $10\sqrt{2}$ E) $12\sqrt{2}$

62. Se tienen las regiones cuadradas ABCD y AMND, O es el centro de ABCD, tal que MON es equilátero. Calcule la medida del diedro entre dichas regiones cuadradas.

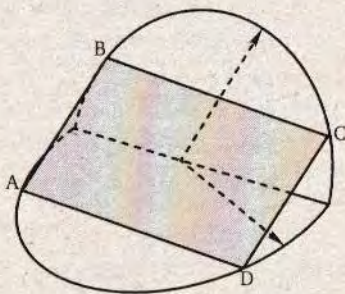
- A) 30° B) 90° C) 60°
D) 53° E) $\frac{127^\circ}{2}$

63. Del gráfico, $AM = MB$, $m\widehat{AM} = 120^\circ$; además, EH es perpendicular al plano que contiene al semicírculo mostrado. $AM = \sqrt{6}(EH)$. Calcule x.



- A) 75° B) $\frac{233^\circ}{2}$ C) $\frac{243^\circ}{2}$
D) $\frac{127^\circ}{2}$ E) $\frac{143^\circ}{2}$

64. Si la medida del diedro entre los semicírculos mostrado es 120° , además, el área de la región cuadrada ABCD es 12, calcule el área de uno de los semicírculos.



- A) 2π B) 3π C) $\frac{5\pi}{2}$
D) $\frac{7\pi}{2}$ E) $\frac{9\pi}{2}$

65. Un triángulo ABC y un rombo ACDE se ubican en planos perpendiculares. $AB = BC = 10$, $m\angle ABC = 90^\circ$ y $m\angle CAE = 53^\circ$. Calcule el área de la región BDE.

- A) $\sqrt{114}$ B) $2\sqrt{114}$ C) $3\sqrt{114}$
D) $4\sqrt{114}$ E) $10\sqrt{89}$

66. Por el vértice B de un rombo ABCD, se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano que lo contiene; además, $m\angle PAC = 45^\circ$ y $m\angle BCD = 53^\circ$. Calcule la medida del diedro entre dicha región rombal y APC.

- A) 30° B) 37° C) 45°
D) $\frac{127^\circ}{2}$ E) 60°

67. De las siguientes proposiciones, dé el valor de veracidad (V) o falsedad (F).

- I. Por dos rectas alabeadas pueden pasar más de dos planos paralelos entre sí.
- II. Dos rectas perpendiculares a una tercera recta necesariamente son paralelas.
- III. No es posible trazar desde un punto dos rectas perpendiculares distintas a un mismo plano.

- A) FFV B) FFF C) VFV
D) VVF E) VVV

68. De las siguientes proposiciones, marque la correcta:

- A) Si dos rectas son paralelas a un plano son siempre paralelas entre sí.
- B) Si una recta y una circunferencia tienen un punto en común, además de que la recta es perpendicular al radio cuyo extremo es dicho punto común, entonces la recta es tangente a la circunferencia.
- C) Si las intersecciones de dos planos con un tercero son rectas paralelas, entonces estos dos planos son paralelos.
- D) Si dos planos son paralelos, las intersecciones de estos con un tercero no son rectas paralelas.
- E) Dos planos paralelos son aquellos que no tienen intersección.

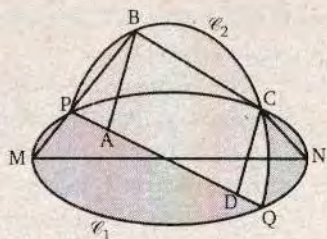
69. Sean tres planos distintos, indique cuál de las posiciones relativas no se da para los tres planos.

- A) Los tres planos son paralelos.
- B) Dos de ellos son paralelos y el tercero es secante a ambos.
- C) Los tres planos se intersecan en una recta.
- D) Los tres planos son secantes dos a dos en tres rectas concurrentes; el punto común a las tres rectas es el único punto común a los tres planos.
- E) Los tres planos son secantes dos a dos en tres rectas cruzadas.

70. En un plano H están contenidas dos circunferencias ortogonales $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ secantes en M y N, por el centro O_1 de $\mathcal{C}_1$ se traza la recta $\mathcal{L}$ perpendicular al plano H; en dicha recta se ubica el punto P ($P \neq O_1$). Si la distancia de P al centro O_2 de $\mathcal{C}_2$ es 17, calcule la distancia de P a la recta MO_2 sabiendo que el radio de $\mathcal{C}_2$ es 8.

- A) $\sqrt{353}$ B) 7 C) 17
D) 16 E) 15

71. En la siguiente figura, $\mathcal{C}_1$ es una circunferencia de centro O y $\mathcal{C}_2$ es una semicircunferencia de diámetro $\overline{PQ}$, además ABCD es un rectángulo donde $\overline{AB}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathcal{C}_1$. Calcule el radio de $\mathcal{C}_2$ si $AD = CN = 2\sqrt{3}$ y $\overline{MB}$ y $\overline{CN}$ son ortogonales.



- A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$
D) 3 E) $2\sqrt{3}$
72. En un rectángulo ABCD se traza $\overline{BM}$ perpendicular al plano del rectángulo, tal que $AB = BM$, luego se ubican los puntos P y Q en $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si $BC = 2(AP) + AM$ y $AP = QC = \frac{AM}{\sqrt{2}}$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{MA}$ y $\overline{PQ}$.
- A) $\arctan(\sqrt{5})$ B) $\arctan(2\sqrt{5})$
C) $\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
D) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ E) $\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$
73. Los planos P y Q son perpendiculares y en ellos se ubican los puntos D y A ($D \in \text{plano P} \wedge A \in \text{plano Q}$), en la recta común de dichos planos se ubican los puntos B y C, tal que $BD = DC$ y $CA = BA$. Si la medida del ángulo diedro determinado por las regiones ABD y ADC es 28° , $AD = 8(BC)$, calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AD}$ y el plano Q.
- A) 60° B) 84° C) 75°
D) 86° E) 53°

74. Sean P_1 y P_2 dos planos y $\overline{r}$ es una recta. Diga cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- I. Si P_1 y P_2 son secantes y $\overline{r}$ está contenida en P_2 , entonces la proyección de cualquier punto de $\overline{r}$ sobre P_1 pertenece al plano P_2 .
- II. Si P_1 y P_2 son perpendiculares y $\overline{r}$ está contenida en P_2 , entonces la proyección de cualquier punto de $\overline{r}$ sobre P_1 pertenece al plano P_2 .
- III. Si P_1 y P_2 son paralelos y $\overline{r}$ interseca a ambos planos, entonces las proyecciones de los puntos de $\overline{r}$ sobre P_1 y P_2 , están contenidas en un plano perpendicular a P_1 y P_2 .

- A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFF

75. En un rectángulo ABCD se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano que contiene al rectángulo tal que el $A_{\triangle APC} = \frac{5}{6} A_{\triangle ABCD}$.

Calcule la medida del diedro que determinan los planos que contienen al triángulo APC y al rectángulo ABCD

- A) 37° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 74°

76. Se tiene dos regiones cuadradas ABCD y ABEF ubicados en planos perpendiculares. Si la distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ es $\sqrt{6}$, calcule el área de la región rectangular FDCE.

- A) $18\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{3}$ C) $36\sqrt{2}$
D) $48\sqrt{6}$ E) $48\sqrt{2}$

77. En un mismo semiespacio determina-
do por el plano que contiene al cuadra-
do ABCD, se trazan $\overline{AE}$, $\overline{DF}$ y $\overline{CG}$
perpendiculares al plano del cuadrado.
Si $AB = b$, $AE = 2(DF) = 2(CG) = 2a$,
calcule la medida del ángulo diedro
determinado por los planos que contie-
nen a las regiones poligonales EFG y
ABCD.

A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}\right)$

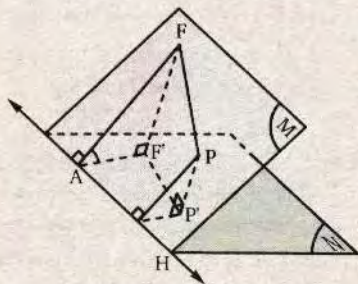
B) $\arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

C) $\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{a}{b}\right)$

E) $\arccos\left(\frac{b}{a}\right)$

78. Según la figura, la región cuadrangu-
lar $AF'PH$ es la proyección ortogonal de
la región cuadrangular $AFPH$ sobre el
plano N. Si $PF = PH$ y el ángulo entre FP
y el plano N mide α . Calcule: $\frac{PF'}{PH}$.



- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

79. Dé el valor de verdad de las siguientes
proposiciones:

- Si dos puntos de una recta equi-
distan de un plano, dicha recta es
paralela al plano.
- La longitud de un segmento per-
pendicular a dos rectas cruzadas
es la distancia entre dichas rectas.
- La distancia entre dos rectas
cruzadas es el menor recorrido
para ir de un punto cualquiera de
una de ellas hacia la otra.

- A) FFF B) VVF C) FFV
D) VFF E) VFV

80. En una circunferencia de centro O, se
traza $\overline{OP}$ perpendicular a su plano, tal
que OP es igual al radio de dicha
circunferencia, luego ubicamos A y B
en la circunferencia. Si $m\widehat{AB} = 106^\circ$ y
el área de la región triangular APB es
 $4\sqrt{34}$, calcule la distancia entre $\overline{OP}$ y la
recta tangente en B a la circunferencia

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

81. En un plano P se ubica el triángulo
ABC donde $m\angle BAC = 60^\circ$. Se tiene
el punto S exterior al plano P, tal que
las distancias de S al punto A, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$
son 25, 20 y 7 respectivamente.
Calcule la distancia de S al plano P

- A) $\sqrt{37}$ B) $\sqrt{38}$ C) $\sqrt{39}$
D) $\sqrt{35}$ E) 6

82. Se tiene el cuadrado ABCD y la semicircunferencia de diámetro $\overline{PB}$, ubicados en planos perpendiculares (P es punto medio de $\overline{AB}$), se traza la recta tangente AT a la semicircunferencia (T es punto de tangencia). Si M es punto medio de $\overline{CD}$ y la distancia $\overline{MT}$ y $\overline{AD}$ entre es 1, calcule el área de la región triangular MBT.

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 4 C) $\frac{\sqrt{17}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{19}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{19}}{5}$

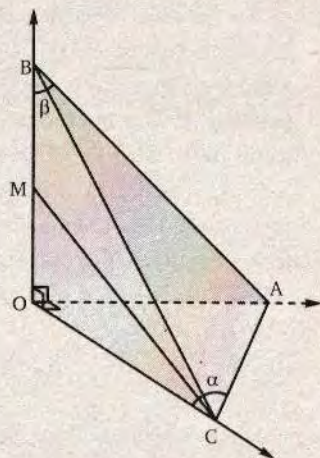
83. Se tiene un ángulo triedro, donde las medidas de dos caras suman 185° y la suma de las medidas de los tres triedros y de su triedro polar es 320° . Calcule la medida de la tercera cara.

- A) 25° B) 30° C) 35°
D) 40° E) 45°

84. En un ángulo triedro O - ABC, las caras AOC y AOB miden 60° , la cara COB mide 90° y $m\angle BAC = 90^\circ$. Si $OB + OC = 8$, calcule OA.

- A) 4 B) 6 C) $2\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

85. Se muestra un triedro trirrectángulo, $BM = MO$, $OC = 4\sqrt{2}$, $\alpha + \beta = 90^\circ$ y el área de la región triangular OMC es numéricamente igual a la mitad de AC. Calcule AC.



- A) 10 B) 11 C) 12
D) 8 E) $6\sqrt{3}$

86. Un punto P dista a, b, c de las caras de un triedro trirrectángulo y la distancia de P al vértice es d. Si

$$ab + bc + ac + \frac{d^2}{2} = 64, \text{ calcule } a + b + c.$$

- A) 4 B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $8\sqrt{2}$ E) 8

87. La proyección de un triángulo ABC sobre un plano H es el triángulo AQR, las proyectantes $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ miden $2a$ y a respectivamente. Calcule la distancia del incentro del triángulo ABC al plano H, si $AQ = QR = AR = 2a$.

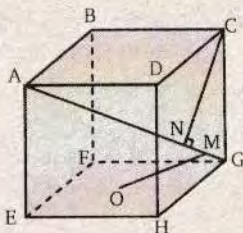
- A) $\frac{a}{2}$ B) a C) $\frac{3a}{2}$
D) $2a$ E) $\frac{4a}{3}$

88. Se tiene una circunferencia de centro O , inscrita en el trapecio rectángulo $ABCD$ (recto en A y B), la cual es tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ en M y N respectivamente ($\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{P\}$). Luego se traza $\overline{OQ}$ perpendicular al plano que contiene a $ABCD$ de modo que:
 $NP + MP = 10$ y $OQ = 6$. Calcule AQ .

A) 8 B) 9 C) 10
 D) $\sqrt{86}$ E) $\sqrt{83}$

89. En el gráfico $ABCD-EFGH$ es un cubo, $NM = MG$, $CN = 3$, $OM = \frac{\sqrt{73}}{2}$ y O es el centro de la cara $EFGH$, calcule la distancia de N a la cara $ABCD$.

A) $2\sqrt{6}$
 B) $3\sqrt{2}$
 C) $\sqrt{6}$
 D) $3\sqrt{3}$
 E) $8\sqrt{3}$



90. Se tiene $\overline{BP}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado $ABCD$ y M es punto medio de $\overline{AD}$ ($\overline{BM} \cap \overline{AC} = \{Q\}$); ubicando como centro al punto P , se traza un arco que contiene a los puntos A y C . Si $AB = 8$ y la $m\angle AC = 60^\circ$, calcule el área de la región triangular QPC .

A) $16\sqrt{3}$ B) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ C) 16
 D) $64\sqrt{2}$ E) $32\sqrt{3}$

91. Se tienen los triángulos equiláteros ABC y AED , tal que D pertenece a BC , E no pertenece al plano que contiene al triángulo ABC y $EB = CD$, calcule la suma de las medidas de las caras del triedro $A-BED$.

A) 100° B) 120° C) 135°
 D) 150° E) 137°

92. En un triángulo rectángulo ABC , recto en B , por A y C se trazan $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, perpendiculares al plano de dicho triángulo, de modo que los ángulos APB y BQC son complementarios. Si $AP = BC$ y $AC = 2$, calcule el valor entero de PQ .

A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

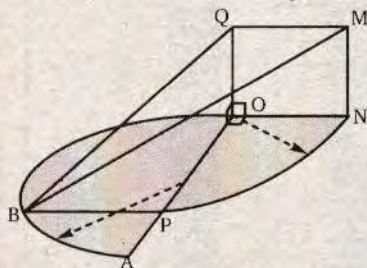
93. Se tiene, un paralelogramo $ABCD$, se ubica el punto de $\overline{BC}$ y luego se traza PQ perpendicular al plano del paralelogramo. Si M es punto medio de $\overline{CD}$, tal que $m\angle MPC = 90^\circ$, $BP = 2(MP) = 4$ y $PC = PQ = 3$, calcule la medida del ángulo entre $\overline{BC}$ y $\overline{AQ}$.

A) 16° B) 30° C) $\frac{53^\circ}{2}$
 D) $\frac{37^\circ}{2}$ E) 45°

94. Un cuadrado $ABCD$, de centro O , y una semicircunferencia de diámetro AB , están contenidos en planos perpendiculares. En la semicircunferencia se ubican los puntos P y Q , de modo que la $m\angle PQ = 90^\circ$ ($\widehat{AP} \neq \widehat{BQ}$). Calcule la $m\angle POQ$.

A) 45° B) 60° C) 30°
 D) 53° E) 90°

95. Según el gráfico, OQMN es un rectángulo, $\overline{ON} \parallel \overline{OP}$, $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, siendo α la medida del ángulo que forma $\overline{BQ}$ con el plano que contiene a la región triangular AOQ. Si $m\widehat{AB} = 53^\circ$ y $AP = 2\sqrt{5}$ calcule la distancia entre $\overline{BM}$ y $\overline{AP}$.



- A) 2 B) 4 C) 6
D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{3}$
96. Sea una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y un rectángulo ABCD, ubicados en planos perpendiculares; en el arco AB se ubica punto L, tal que: $m\widehat{BL} = 120^\circ$; $AD = 3$ y $DC = 8$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{BC}$ y $\overline{DL}$.
- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°
97. Las caras de un ángulo diedro son intersecadas en los puntos M y N por una recta, además, la proyección ortogonal de M y N sobre la arista es A. Si la medida del ángulo diedro es igual a la diferencia de las medidas de los ángulos ANM y AMN cuya razón es de 3 a 1, calcule la medida del diedro.
- A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

98. Sean las regiones cuadradas ABCD y ABFE, con centros en A y en E. Se trazan los cuadrantes DAB y BEF, además, en los arcos DB y BF se ubican los puntos M y N. Si el máximo valor de MN es 8 y $AD = 5$, calcule la medida del diedro determinado por las regiones cuadradas.

A) 74° B) 90° C) 106°
D) 120° E) 150°

99. En un triedro isósceles O-ABC, donde las caras AOB y AOC tienen igual medida, se ubica M en $\overline{OA}$; H en $\overline{OB}$; L y P en la cara BOC y $m\angle MLH = 90^\circ$, $\overline{HP} \cap \overline{OC} = \{Q\}$; $m\angle HPL = m\angle OQP$ y $m\angle MHO = 90^\circ$. Si la medida del ángulo que forma ML con la cara BOC es 60° , $OH = 12$ y la proyección de OH sobre $\overline{OC}$ es igual a $\overline{ML}$, calcule ML.

A) 6 B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 8 E) 10

100. Se tiene un triedro O-ABC, en el cual $m\angle AOB = m\angle BOC = 60^\circ$ y $m\angle AOC = 90^\circ$; en las aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ se ubican los puntos R, P y Q respectivamente. Si $OR + OQ = 12$ y $m\angle RPQ = 90^\circ$, calcule OP.

A) 9 B) 12 C) 6
D) $12\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{3}$



CLAVES

1	B
2	C
3	D
4	C
5	C
6	A
7	D
8	D
9	E
10	B
11	B
12	C
13	C
14	C
15	C
16	B
17	A
18	C
19	D
20	D
21	A
22	B
23	B
24	E
25	D

26	A
27	E
28	C
29	D
30	B
31	B
32	C
33	B
34	D
35	E
36	D
37	C
38	D
39	B
40	B
41	A
42	C
43	D
44	C
45	B
46	A
47	D
48	D
49	E
50	C

51	E
52	D
53	A
54	E
55	A
56	E
57	B
58	D
59	E
60	A
61	B
62	C
63	B
64	D
65	E
66	E
67	A
68	E
69	E
70	E
71	D
72	A
73	C
74	C
75	D

76	C
77	B
78	A
79	A
80	E
81	A
82	A
83	C
84	A
85	D
86	D
87	B
88	D
89	C
90	B
91	B
92	A
93	C
94	B
95	B
96	D
97	E
98	C
99	D
100	C

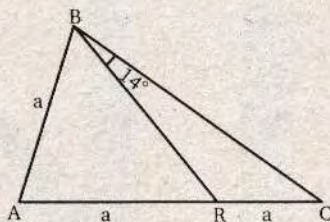
EXÁMENES DE ADMISIÓN UNVI

UNI - 2008 - I

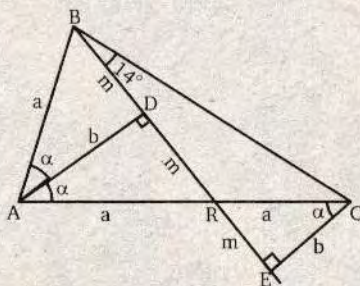
PROBLEMA 01: En un triángulo ABC se traza la mediana BR; tal que $AB = AR$, $m\angle RBC = 14^\circ$. Halle $\angle BAC$.

A) 104° B) 105° C) 106° D) 107° E) 108° **Resolución:**

Del enunciado :



Complementamos con los siguientes trazos:



Los triángulos ABD, ADR y RCE son congruentes :

Por propiedad :

$$\Rightarrow \tan 14^\circ = \frac{1}{4} \dots (1)$$

Del gráfico: $\tan 14^\circ = \frac{b}{3m}$

De (1): $\frac{1}{4} = \frac{b}{3m} \Rightarrow b = \frac{3}{4}m \quad \dots(2)$

En el triángulo ADR:

$$\tan \alpha = \frac{m}{b}$$

De (2):
$$= \frac{m}{\frac{3}{4}m}$$

$$= \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53^\circ$$

Luego: $m\angle BAC = 2\alpha = 2(53^\circ) = 106^\circ$

Rpta.: C

PROBLEMA 02:

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Supongamos que:

- 1) $a < b < c$, y
- 2) a, b, c forman una progresión aritmética. Denotando por r el radio de la circunferencia inscrita y por R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, entonces el valor de rR es:

A) $\frac{a+c}{6}$

B) $\frac{a+b}{6}$

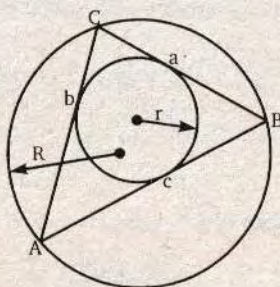
C) $\frac{ab}{6}$

D) $\frac{ac}{6}$

E) $\frac{bc}{6}$

Resolución:

Del enunciado:



$$a < b < c$$

Por condición del problema, las longitudes de los lados a , b y c del triángulo forman una progresión, entonces se cumple :

$$b - a = c - b \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow a + c = 2b$$

Por teoría, el área del triángulo:

$$\bullet S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \quad \dots(2)$$

$$\bullet S_{ABC} = \left(\frac{a+b+c}{2} \right) r \quad \dots(3)$$

Igualando (2) y (3):

$$\left(\frac{a+b+c}{2} \right) r = \frac{abc}{4R}$$

$$\text{De (1):} \quad \left(\frac{(2b)+b}{2} \right) r = \frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow rR = \frac{ac}{6}$$

Rpta.: D

PROBLEMA 03:

Dados dos polígonos regulares convexos, cuyos números de diagonales se diferencian en 4 y cuya medida de sus ángulos centrales están en la relación 5 : 6. Determine la diferencia entre la medida del ángulo interior del polígono regular convexo que tiene menor número de lados y la medida del ángulo exterior del polígono de mayor número de lados.

A) 48°

B) 70°

C) 90°

D) 100°

E) 114°

Resolución:

Si un polígono es de N lados, entonces el total de sus diagonales .

$$D_N = \frac{N(N-3)}{2} \quad \dots(1)$$

$$D_m - D_n = 4$$

$$\begin{aligned} \text{De (1):} \quad & \frac{m(m-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 4 \\ & m^2 - 3m - n^2 + 3n = 8 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{360^\circ}{\frac{m}{n}} = \frac{5}{6} ; m > n \\ \Rightarrow n &= \frac{5}{6} m \quad \dots(4) \end{aligned}$$

Reemplazando (4) en (3):

$$\begin{aligned} & m^2 - 3m - n^2 + 3n = 8 \\ & m^2 - 3m - \left(\frac{5}{6}m\right)^2 + 3\left(\frac{5}{6}m\right) = 8 \\ & 11m^2 - 18m - 288 = 0 \\ \Rightarrow m &= \frac{18 \pm \sqrt{(18)^2 - 4(11)(-288)}}{2(11)} \\ \Rightarrow m_1 &= 6 ; m_2 = \frac{48}{11} \text{ (descartado)} \end{aligned}$$

Reemplazando $m = 6$ en (4):

$$n = \frac{5}{6}(6) = 5$$

El ángulo interior del polígono regular de 5 lados:

$$\begin{aligned} i_5 &= \frac{180^\circ(n-2)}{n} \\ &= \frac{180^\circ(5-2)}{5} \\ &= 108^\circ \end{aligned}$$

El ángulo exterior del polígono regular de 6 lados:

$$e_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

La diferencia de estos dos ángulos:

$$i_5 - e_6 = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$$

Rpta.: A

NUESTRAS PUBLICACIONES

LIBROS



RESÚMENES TEÓRICOS



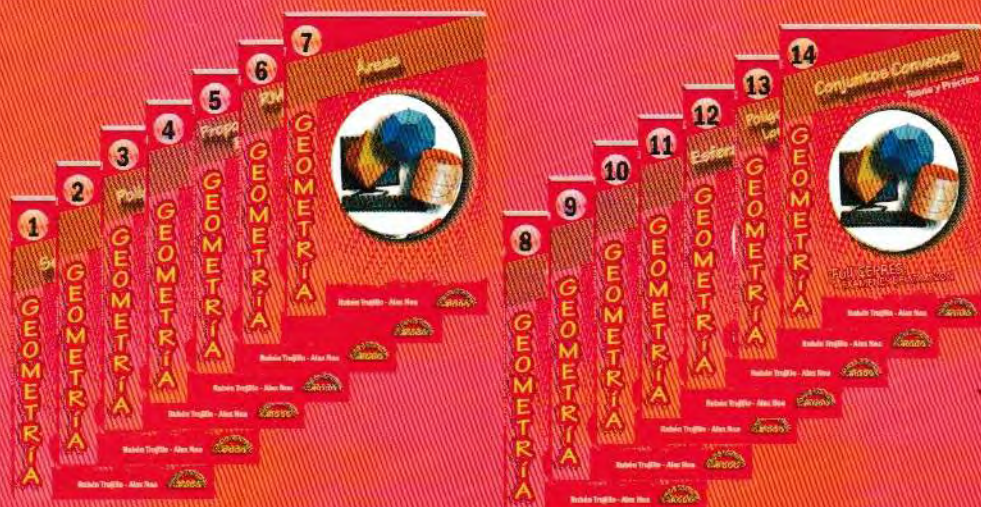
TEMAS SELECTOS



*El que ama la instrucción
ama la sabiduría. Prov. 12,1*

PEDIDOS: 528 - 1921 / 423 - 8072

TEMARIO GEOMETRÍA



T. S.	TEMA
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación, Congruencia y Aplic.)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza Triángulos - R. M. Circunferencia
6	Relaciones Métricas en Triángulos y en Cuadriláteros
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedr
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos

Teléfonos: 424 - 6350

992 - 796104

 / **fondoeditorialrodo**

editorialrodo@gmail.com